5-я Олимпиада Мегаполисов

Математика

Решения. День 1

Задача 1. В треугольнике ABC с прямым углом C биссектриса AL (где L лежит на отрезке BC) и высота CH пересекаются в точке K. Биссектриса угла BCH пересекает отрезок AB в точке M. Докажите, что $CK = ML$. *(Alexey Doledenok)*

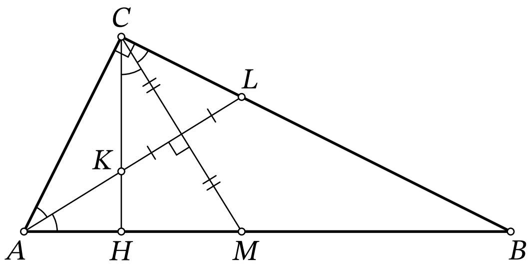

Рис. 1: к решению задачи 1

Решение. Поскольку $\angle BCH = 90° - \angle ABC = \angle BAC$, то

$$\angle ACM = 90° - \angle BCM = 90° - \angle BAC/2 = 90° - \angle CAL\,,$$

то есть биссектрисы AL и CM перпендикулярны (рис. 1). В треугольнике ACM прямая AL содержит биссектрису и высоту, поэтому AL является серединным перпендикуляром к отрезку CM. Аналогично в треугольнике CKL прямая CM содержит биссектрису и высоту, поэтому CM является серединным перпендикуляром к KL. Тогда $CKML$ — ромб, откуда $CK = ML$. □

Задача 2. Существует ли такое целое положительное число n, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5? *(Nazar Agakhanov)*

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что, напротив, существует такое n. Пусть n состоит из k цифр, так что

$$10^k > n \geqslant \underbrace{666...6}_{k} = \frac{2}{3}(10^k - 1)\,.$$

Если $n = \underbrace{666...6}_{k}$, то последняя цифра числа n^2 равна 6. Иначе

$$10^k > n > \frac{2}{3}\cdot 10^k\,,$$

и, следовательно,

$$10^{2k} - 1 = \underbrace{999...9}_{2k} \geqslant n^2 > \frac{4}{9} \cdot 10^{2k} > \frac{4}{9} \cdot \underbrace{999...9}_{2k} = \underbrace{444...4}_{2k}\ .$$

Таким образом,

$$\underbrace{999...9}_{2k} \geqslant n^2 > \underbrace{444...4}_{2k},$$

значит, n^2 состоит из $2k$ цифр, при этом все эти цифры не могут оказаться меньшими или равными 4. □

Задача 3. Дано целое число $n > 1$. Монетный двор выпускает монеты n различных номиналов $a_1, a_2, ..., a_n$, где каждый номинал a_i — целое положительное число (количество монет каждого номинала не ограничено). Множество номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ назовем *удачным,* если сумму $a_1 + a_2 + ... + a_n$ можно набрать монетами ровно одним способом (а именно, взяв по одной монете каждого номинала).

(a) Докажите, что существует такое удачное множество номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, что

$$a_1 + a_2 + ... + a_n < n2^n.$$

(b) Докажите, что для любого удачного множества номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > n2^{n-1}.$$

(Ilya Bogdanov)

Решение части (a). Покажем, что номиналы $a_i = 2^n - 2^{n-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, составляют удачное множество. Для начала заметим, что

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = n2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = (n-1)2^n + 1 < n2^n\,.$$

Предположим теперь, что S набирается некоторыми монетами:

$$S = \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} = p2^n - \sum_{k=1}^{p} 2^{j_k}\,,$$

где $j_k = n - i_k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Поскольку $S > (n-1)2^n$, получаем $p \geqslant n$, и

$$\sum_{k=1}^{p} 2^{j_k} = (p - n + 1)2^n - 1 \equiv -1 \pmod{2^n}.$$

Без ограничения общности считаем, что $j_1 \leqslant j_2 \leqslant ... \leqslant j_p$. Докажем, что $j_k \leqslant k-1$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассуждая от противного, выберем минимальное $k \leqslant n$ такое, что $j_k \geqslant k$. Тогда

$$-1 \equiv \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \pmod{2^k},\ ,$$

что невозможно, так как

$$0 \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} 2^{s-1} = 2^{k-1} - 1 .$$

Противоречие.

В итоге получаем

$$(p-n+1)2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{j_k} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{j_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{n-1} = 2^n - 1 + (p-n)2^{n-1} ,$$

или $(p-n)2^n \leqslant (p-n)2^{n-1}$. Такое может быть, только если $p = n$ и все неравенства обращаются в равенства, откуда $j_k = k-1$. Другими словами, $S = a_1 + \ldots + a_n$ — действительно единственный способ собрать S предложенными монетами. □

Замечание 1. Другой способ проверить утверждение — это рассмотреть мультимножество $\{2^{j_1}, 2^{j_2}, \ldots, 2^{j_p}\}$ и последовательно менять его, объединяя две копии некоторого 2^j в один экземпляр 2^{j+1}. Когда процесс останавливается, все числа в мультимножестве оказываются различны, а сумма по-прежнему сравнима с -1 по модулю 2^k, так что мультимножество должно содержать все степени 2^0, ..., 2^{k-1}. Таким образом, в конце процесса мультимножество содержит k чисел, меньших 2^k, и, следовательно, оно содержало не менее k таких чисел до запуска процесса.

Замечание 2. Есть несколько рабочих примеров. Например, можно взять $a_1 = 2^{n-1}$ и $a_i = 2^n + 2^{i-2}$ для $i = 2, 3, \ldots, n$.

Решение части (b). Покажем, что $a_1 \geqslant 2^{n-1}$ в любом удачном наборе $a_1 < \ldots < a_n$ из n монет; это сразу дает $S = a_1 + \ldots + a_n > na_1 \geqslant n2^{n-1}$.

Обозначим $a = a_1$. Пусть Σ — мультимножество всех сумм, которые можно собрать с помощью монет a_2, a_3, ..., a_n, используя их не более чем по одному разу; таким образом, Σ состоит ровно из 2^{n-1} чисел (некоторые из которых могут быть равны друг другу); минимальное из этих чисел — 0, а максимальное — $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Предположим, что Σ содержит два числа $S_1 \geqslant S_2$, сравнимых друг с другом по модулю a, так что $S_1 = S_2 + at$ для некоторого целого $t \geqslant 0$. Тогда существует альтернативный способ собрать S монетами, а именно

$$S = (S - S_1) + S_2 + at$$

(что означает, что мы берем монеты $a_1, \ldots, a_n$, удаляем набор с суммой S_1, добавляем набор с суммой S_2 и добавляем t монет номиналом a). Это противоречит удачности.

Таким образом, Σ содержит 2^{n-1} чисел, попарно несравнимых по модулю a, что дает $a \geqslant 2^{n-1}$. □