5-я Олимпиада Мегаполисов

Математика · День 1

Задача 1. В треугольнике ABC с прямым углом C биссектриса AL (где L лежит на отрезке BC) и высота CH пересекаются в точке K. Биссектриса угла BCH пересекает отрезок AB в точке M. Докажите, что $CK = ML$.

Задача 2. Существует ли такое целое положительное число n, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5?

Задача 3. Дано целое число $n > 1$. Монетный двор выпускает монеты n различных номиналов $a_1, a_2, ..., a_n$, где каждый номинал a_i — целое положительное число (количество монет каждого номинала не ограничено). Множество номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ назовем *удачным*, если сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$ можно набрать монетами ровно одним способом (а именно, взяв по одной монете каждого номинала).

(a) Докажите, что существует такое удачное множество номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n \cdot 2^n.$$

(b) Докажите, что для любого удачного множества номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > n \cdot 2^{n-1}.$$