

5-я Олимпиада Мегалополисов

Математика · День 2

Задача 4. Положительные числа a , b и c таковы, что $a^2 = b^2 + bc$ и $b^2 = c^2 + ac$. Докажите, что $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Задача 5. В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Алиса и Ева по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Алиса ходит первой. Каждым ходом Алиса выбирает пустую клетку и ставит в неё крестик, а Ева каждым ходом выбирает пустую клетку и ставит нолик. После того, как в первой строке не остаётся пустых клеток, игроки переходят ко второй строке, и так далее (в каждой новой строке Алиса ходит первой).

Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Алиса хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Ева — как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если обе будут действовать наилучшим для себя образом?

Задача 6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Пусть A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 — точки пересечения пар диагоналей BD и CE , CE и DA , DA и EB , EB и AC , AC и BD соответственно. Докажите, что если четыре из пяти четырёхугольников AB_1A_1B , BC_1B_1C , CD_1C_1D , DE_1D_1E , EA_1E_1A вписанные, то и пятый тоже вписанный.