

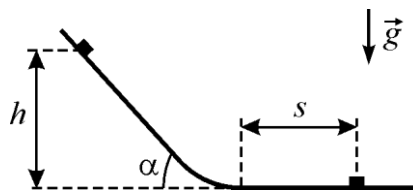
## Задача 1: «Такое разное трение»

### Часть 1: Невозможное трение.

Гантель, сделанная из двух маленьких массивных шариков и легкого жесткого стержня, удерживается в вертикальном положении так, что нижний (более легкий) шарик находится на горизонтальной шероховатой поверхности. Массы шариков отличаются в 1,5 раза. Гантель аккуратно отпускают, и она начинает падать. Сопротивление воздуха при этом отсутствует. Нижний шарик начинает скользить по поверхности, когда угол отклонения стержня от вертикали достигает величины  $\alpha_1 = 30^\circ$ . Найдите коэффициент сухого трения  $\mu_1$  между нижним шариком и поверхностью. Какими должны быть коэффициенты трения ( $\mu_2$  и  $\mu_3$ ), чтобы скольжение нижнего шарика началось при углах отклонения стержня от вертикали  $\alpha_2 = 45^\circ$  и  $\alpha_3 = 60^\circ$ ? Все ответы приведите с точностью до сотых долей. Найдите (в градусах, с точностью до десятых долей) самый большой угол отклонения стержня от вертикали, при котором в такой системе может начаться скольжение нижнего шарика (то есть, если скольжение не начнется до этого угла, то оно уже не начнется вплоть до момента падения верхнего шарика на поверхность).

### Часть 2: Трение на перегибе.

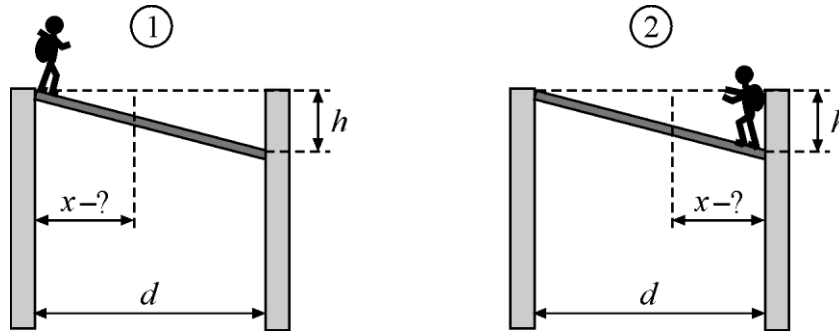
Представим себе опыт, в ходе которого маленькая тяжелая шайба соскальзывает сверху вниз по пластиковому желобу без начальной скорости. Желоб состоит из трех участков – наклонного прямолинейного, горизонтального прямолинейного и участка сопряжения, который обеспечивает плавное соединение первых двух участков друг с другом. Участок сопряжения представляет собой цилиндрическую поверхность (см. рисунок). Радиус кривизны этой поверхности намного меньше начальной высоты  $h$  шайбы, но намного больше размеров шайбы, и не зависит от  $\alpha$ . Оказалось, что при углах наклона  $\alpha \leq \alpha_c = 30^\circ$  шайба остается неподвижной на наклонной части желоба. При  $\alpha = 60^\circ$  и запуске шайбы с некоторой начальной высоты  $h$  длина ее тормозного пути на горизонтальном участке равна  $s = 102$  см. Найдите длину тормозного пути при запуске шайбы с высоты  $h' = 2h$  при  $\alpha' = 45^\circ$  (ответ выразите в сантиметрах). Оцените (в процентах) точность полученного результата в случае, если радиус кривизны участка сопряжения равен 7 см. Считайте, что коэффициент сухого трения шайбы о желоб всюду одинаков.



### Часть 3: Переправа «на трении».

В глубокой скальной расщелине шириной  $d = 4$  м с параллельными отвесными стенками застряло прямое однородное бревно, удерживающееся благодаря трению. Один его конец находится у самого верхнего края одной из стенок, второй – на  $h = 0,9$  м ниже. Бревно располагается в вертикальной плоскости, перпендикулярной стенам расщелины. Масса бревна  $m = 80$  кг. Коэффициент трения между концами бревна и стенами расщелины равен  $\mu = 0,9$ . Рассмотрим две разные истории.

- 1) Турист 1, масса которого (вместе с рюкзаком)  $M = 120$  кг, решил перебраться через расщелину по этому бревну. Когда он встал на верхний конец бревна, тот совсем чуть-чуть проскользнул вниз, но бревно удержалось.
- 2) Турист 2, масса которого (вместе с рюкзаком)  $M = 120$  кг, решил перебраться через расщелину по другому бревну с такими же параметрами. Когда он аккуратно слез с края расщелины и встал на нижний конец бревна, тот совсем чуть-чуть проскользнул вниз, но бревно удержалось.

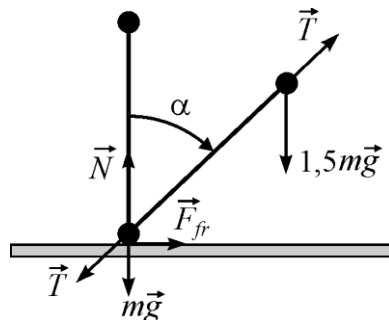


Будем считать, что изгибом бревна в обоих случаях можно пренебречь. Кто из туристов сможет дойти до конца бревна (в ответе запишите 1 или 2)? Для того из туристов, которому нельзя идти по бревну, определите, на каком расстоянии  $x$  от стены расщелины, от которой он идет, будет находиться этот турист в тот момент, когда он вместе с бревном упадет в расщелину (если всё же пойдет)? В качестве ответа запишите формулу, в которую входят только величины, заданные в условии задачи, и численное значение в метрах, с точностью до сотых долей.

В более реалистичной модели бревно может изогнуться. Рассмотрим переправу того из туристов, у которой она будет успешной. Оцените средний радиус изгиба бревна в тот момент, когда турист будет находиться точно на его середине (в ответе запишите формулу, в которую входят только заданные в условии задачи величины, и дайте численное значение в метрах). Как влияет изгиб бревна на опасность падения (увеличивает – 1, уменьшает – 2, не влияет – 0)? Плотность дерева  $\rho = 630$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга для сжатия бревна вдоль волокон  $E = 10^{10}$  Па, сдвиговые деформации пренебрежимо малы, диаметр бревна практически постоянен, ускорение свободного падения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>.

### Возможное решение:

1. Пока нижний шарик не начал скользить, верхний движется по окружности под действием сил тяжести и реакции стержня  $T$ . Запишем уравнение движения верхнего шарика в проекции на направление стержня:  $1,5m \frac{v^2}{L} = 1,5mg \cos \alpha - T$  (здесь  $m$  – масса легкого шарика,  $v$  – скорость верхнего шарика,  $L$  – длина стержня,  $\alpha$  – угол наклона стержня к вертикали). Из закона сохранения механической энергии следует, что  $v^2 = 2gL(1 - \cos \alpha)$ .



Из этих соотношений можно выразить зависимость силы реакции стержня от угла его наклона:  $T(\alpha) = \frac{3}{2}mg(3\cos \alpha - 2)$ .

На нижний шарик действуют силы тяжести, реакции стержня, нормальной реакции поверхности  $N$  и трения  $F_{fr}$ . Условие равновесия нижнего шарика дает:

$$\begin{cases} N = mg + T \cos \alpha = \frac{mg}{2}(9\cos^2 \alpha - 6\cos \alpha + 2), \\ F_{fr} = T \sin \alpha = \frac{3}{2}mg \sin \alpha (3\cos \alpha - 2). \end{cases}$$

Сила трения удерживает шарик от проскальзывания, пока ее значение  $|F_{fr}| \leq \mu N$ . Поэтому угол, при котором начнется скольжение, и коэффициент трения связаны соотношением

$$\mu = \frac{3 \sin \alpha |3 \cos \alpha - 2|}{9 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 2}.$$

Подстановка в эту формулу заданных значений угла дает значения  $\mu_1 \approx 0,252$ ,  $\mu_2 \approx 0,114$  и  $\mu_3 \approx 1,039$ . Тут необходимо заметить, что значение коэффициента трения при  $\alpha_2 = 45^\circ$  является невозможным (оно меньше, чем при  $\alpha_1 = 30^\circ$ )! На самом деле при  $\mu \approx 0,114$  скольжение, очевидно, начнется при величине угла, меньшей  $30^\circ$  (при  $\alpha \approx 11^\circ$ ). Все дело в немонотонности полученной зависимости  $\mu(\alpha)$ . Если ввести функцию

$f(x) = \frac{3\sqrt{1-x^2} |3x-2|}{9x^2-6x+2}$ , то можно обнаружить, что условие  $f'_x(x) = 0$  приводит к

уравнению  $39x^2 - 40x + 6 = 0$ . Поэтому при  $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{20 + \sqrt{166}}{39}\right) \approx 32,5^\circ$  и

$\alpha_{II} = \arccos\left(\frac{20 - \sqrt{166}}{39}\right) \approx 79,5^\circ$  зависимость  $\mu(\alpha)$  имеет максимумы. При

$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,2^\circ$  функция  $\mu(\alpha)$  обращается в ноль. Поэтому существуют

«невозможные» ни при каком  $\mu$  значения  $\alpha$ , и угол  $\alpha_2 = 45^\circ$  относится именно к области

«невозможных» значений. Кроме того, мы обнаружили, что максимально возможным углом начала скольжения является  $\alpha_{II} = \arccos\left(\frac{20 - \sqrt{166}}{39}\right) \approx 79,5^\circ$  – если стержень наклонился до этого угла и нижний шарик не начал скользить, то он и не начнет скользить до самого момента удара верхнего шарика о поверхность.

2. Ясно, что коэффициент трения шайбы о желоб равен  $\mu = \operatorname{tg} \alpha_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Пусть  $r$  – радиус кривизны участка сопряжения. Тогда после соскальзывания шайбы по прямолинейному наклонному участку она наберет скорость  $v_1$ , определяемую из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg[h - r(1 - \cos \alpha)] + A_{fr}.$$

Сила трения скольжения на наклонном участке  $|F_{fr}| = \mu mg \cos \alpha$ , а ее работа отрицательна ( $A_{fr} = -|F_{fr}| \frac{h - r(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = -\mu mg \operatorname{ctg} \alpha [h - r(1 - \cos \alpha)]$ ). В результате, с учетом того, что  $r \ll h$ , получаем:  $v_1^2 = 2g[h - r(1 - \cos \alpha)](1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) \approx 2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)$ . При рассмотрении движения по участку сопряжения удобно использовать новую переменную – угловое смещение  $\varphi$  шайбы при ее движении от начала участка сопряжения (этот угол изменяется от 0 до  $\alpha$ ). Во всех случаях шайба не останавливается, поэтому сила трения является силой трения скольжения и уравнения для касательной и центростремительной компоненты ускорения имеют вид ( $N$  – сила нормальной реакции желоба):

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = -\mu N + mg \sin(\alpha - \varphi) \\ m \frac{v^2}{r} = N - mg \cos(\alpha - \varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{r} + g [\sin(\alpha - \varphi) - \mu \cos(\alpha - \varphi)].$$

(угол наклона касательной к участку сопряжения относительно горизонтали равен  $\alpha - \varphi$ ).

Малое изменение угла  $\varphi$  за время  $dt$  равно  $d\varphi = \frac{v}{r} dt$ , поэтому  $\frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{r d\varphi} = \frac{1}{2r} \frac{d(v^2)}{d\varphi}$ .

Следовательно,  $\frac{d(v^2)}{d\varphi} = -2\mu v^2 + 2gr [\sin(\alpha - \varphi) - \mu \cos(\alpha - \varphi)]$ . Снова пренебрегаем

слагаемыми порядка  $gr$ , и находим, что  $\frac{d(v^2)}{d\varphi} \approx -2\mu v^2$ . Функция, производная которой

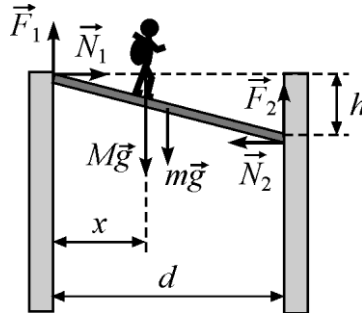
пропорциональна ей самой – это экспонента, и поэтому  $v^2(\varphi) \approx \operatorname{const} \cdot e^{-2\mu\varphi}$ . Поскольку  $v^2(0) = v_1^2$ , то  $v^2(\varphi) \approx v_1^2 \cdot e^{-2\mu\varphi}$ . Тогда скорость, с которой шайба выезжает на горизонтальный участок, удовлетворяет соотношению  $v_2^2 \approx v_1^2 \cdot e^{-2\mu\alpha}$ . Значит, с точностью до поправок порядка  $gr$ , квадрат скорости в начале горизонтального участка равен  $v_2^2 \approx 2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) \cdot e^{-2\mu\alpha}$ . Длина тормозного пути на горизонтальном участке, где

ускорение шайбы  $|\vec{a}_s| = \mu g$ , равна:  $s = \frac{v_2^2}{2\mu g} \approx h \left[ \frac{1}{\mu} - \operatorname{ctg} \alpha \right] \cdot e^{-2\mu\alpha}$ . Для заданных значений

получаем:  $s \approx \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$ , а  $s' \approx 2h(\sqrt{3}-1)\exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$ . Следовательно,  
 $s' \approx s(3-\sqrt{3})\exp\left(-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) \approx 175$  см.

Слагаемые из выражений для  $v_1^2$  и  $v_2^2$ , которые были отброшены, имеют порядок величины  $2gr$ . Поэтому отбрасыванием этих слагаемых вносится относительная ошибка порядка  $\frac{r}{h} \approx 0,024$ , то есть около 3 %.

3. Изучим условия отсутствия проскальзывания каждого из концов бревна в тот момент, когда турист 1 находится на расстоянии  $x$  от «левого» края расщелины. Запишем условия равновесия бревна в этот момент времени.



Условие баланса сил по горизонтали приводит к равенству величин сил нормальной реакции:  $N_1 = N_2 \equiv N$ . Условие баланса сил по вертикали означает, что сумма величин сил трения, действующих на концы бревна, уравнивает сумму сил тяжести:  $F_1 + F_2 = (M + m)g$ . Правило моментов, записанное относительно верхнего конца бревна,

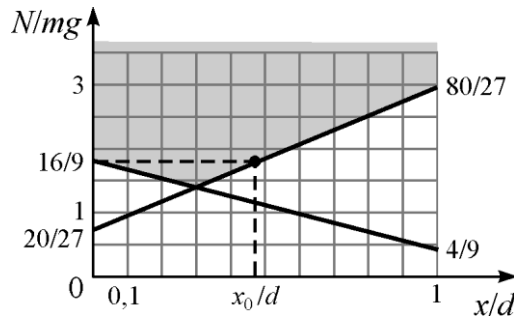
приводит к соотношению:  $F_2 d - Nh - mg \frac{d}{2} - Mg x = 0$ , из которого находится

$$F_2 = \frac{1}{2} mg + Mg \frac{x}{d} + N \frac{h}{d}. \text{ Вместе с этим находим, что } F_1 = \frac{1}{2} mg + Mg \frac{d-x}{d} - N \frac{h}{d}.$$

Отсутствие проскальзывания обоих концов бревна реализуется, если  $F_{1,2} \leq \mu N$ . Таким образом, бревно не падает, если сила нормальной реакции стен расщелины, уравнивающая горизонтальную составляющую силы упругости бревна (сжатого при «проталкивании» в расщелину) удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} N \geq \frac{(2M + m)d - 2Mx}{2(\mu d + h)} g, \\ N \geq \frac{md + 2Mx}{2(\mu d - h)} g. \end{cases}$$

Графически область значений  $N$ , при которых для каждого  $x$  бревно не проскальзывает по обеим стенам расщелины, показана на диаграмме.



Значение  $N$ , которое отвечает первой «истории», определяется из того условия, что при  $x=0$  верхний конец бревна «совсем чуть-чуть проскользнул вниз», но удержался. Таким образом,  $F_1 = \mu N$  при  $x=0$ , то есть  $N = \frac{(2M+m)dg}{2(\mu d+h)}$ . Как видно, при этом значении силы

нормальной реакции, при увеличении  $x$  требование отсутствия скольжения на нижнем конце будет неминуемо нарушено, и это произойдет при  $\frac{md+2Mx_0}{\mu d-h} = \frac{(2M+m)d}{\mu d+h}$ , то есть

при  $x_0 = \left[ (2M+m) \frac{\mu d-h}{\mu d+h} - m \right] \frac{d}{2M} \approx 1,87$  м. Таким образом, турист 1 упадет в расщелину

вместе с бревном, если пойдет по нему – он даже не дойдет до середины бревна!

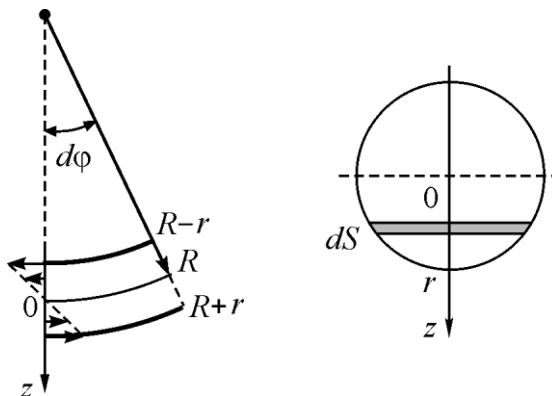
В истории 2 значение  $N$  определяется из условия  $F_2 = \mu N$  при  $x=d$ , и  $N = \frac{(2M+m)dg}{2(\mu d-h)}$ .

Теперь, как видно из диаграммы, проскальзывание не начнется ни при каком  $x$ , и турист 2 благополучно дойдет до другого края расщелины.

Для оценки среднего радиуса кривизны оси бревна предположим, что этот радиус намного больше длины бревна  $L \approx \sqrt{d^2+h^2} = 4,1$  м, и будем считать его постоянным для всех частей бревна. Равновесный изгиб отвечает ситуации, когда в каждом сечении бревна момент сил упругости уравнивает момент внешних изгибающих сил. Пока бревно не начало скользить, точки касания стен расщелины можно считать «закрепленными» точками бревна, и считать, что изгиб бревна связан с действием сил тяжести, приложенных к бревну и к туристу. Для оценки будем считать, что сила тяжести бревна приложена к его центру масс, и тогда момент этих сил относительно «закрепленной» точки равен

$M_{ex} = (M+m)g \frac{d}{2}$ . Рассмотрим сечение бревна радиусом  $r$ , средняя линия которого

изогнулась с радиусом кривизны  $R$ , сохранив свою длину. Тогда слои бревна, находящиеся ближе этой линии к центру кривизны, оказываются сжатыми, а находящиеся дальше – растянутыми.



Введем координату  $-r \leq z \leq +r$ , определяющую положение слоя относительно средней линии (см. рисунок). Элемент бревна, длина которого в недеформированном состоянии равна  $dl$ , будет иметь угловой размер  $d\varphi = \frac{dl}{R}$ . Поэтому величина деформации этого

элемента в слое с координатой  $z$  равна  $\delta l = (R+z)d\varphi - dl = \frac{z}{R} dl$ . Коэффициент жесткости

этого слоя  $k = E \frac{dS}{dl}$  ( $dS$  – площадь сечения этого слоя), и сила упругости равна

$dF_{el} = k\delta l = E \frac{z}{R} dS$ , а ее вклад в общий момент сил упругости в данном сечении

$dM_{el} = z dF_{el} = \frac{E}{R} z^2 dS$ . Итак, полный момент сил упругости

$M_{el} = \frac{E}{R} \int_{-r}^{+r} z^2 dS = \frac{4E}{R} \int_0^{+r} z^2 \sqrt{r^2 - z^2} dz$ . Вычислив интеграл (например, с помощью

подстановки  $z = r \cdot \sin \alpha$ :  $\int_0^{+r} z^2 \sqrt{r^2 - z^2} dz = r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi r^4}{16}$ ), получаем

$M_{el} = \frac{\pi E r^4}{4R} = \frac{Em^2}{4\pi R \rho^2 L^2}$ . Здесь учтено, что сечение бревна  $\pi r^2 = \frac{m}{\rho L}$ . Следовательно,

уравнение  $M_{ex} = M_{el}$  приводит к соотношению  $(M+m)g \frac{d}{2} = \frac{Em^2}{4\pi R \rho^2 L^2}$ , из которого

$R = \frac{Em^2}{2\pi(M+m)g\rho^2 d(d^2+h^2)} \approx 190$  м. Как видно, наше предположение, что  $L \ll R$ ,

оправдывается с хорошей точностью. Вместе с тем ясно, что на самом деле изгиб неоднороден и сила тяжести распределена по бревну, поэтому наши вычисления действительно носят оценочный характер.

Изгиб увеличивает длину осевой линии бревна (по сравнению со случаем бревна без изгиба), то есть уменьшает величину его продольной деформации. Следовательно, он уменьшает силу, с которой сжатое бревно давит на стены расщелины, и – естественно – величину силы нормальной реакции стен  $N$ . Как ясно из нашей диаграммы, это увеличивает опасность падения (на самом деле – очень существенно, так что и второму туристу тоже не следует идти по бревну).

**Примечание.** В оценочном вычислении допустимы упрощения, не изменяющие результат существенно. Например, можно заменить бревно на брус квадратного сечения с той же

площадью  $S = \frac{m}{\rho L} \equiv a^2$ . Тогда интеграл вычисляется намного проще:

$\int_{-a/2}^{+a/2} z^2 dS = 2a \int_0^{+a/2} z^2 dz = \frac{a^4}{12}$ , а результат почти такой же:  $R = \frac{Em^2}{6(M+m)g\rho^2 d(d^2+h^2)} \approx 200$  м.

Также возможно оценить момент, заменив непрерывно распределенные силы упругости на

пару «средних» сил с модулем  $F_{el} = k \frac{r}{2R} dl = E \frac{\pi r^2}{2 \cdot dl} \frac{r}{2R} dl = E \frac{\pi r^3}{4R}$ , расстояние между

линиями действия которых равно  $r$ , и тогда  $M_{el} = E \frac{\pi r^4}{4R}$  оказывается таким же, как и в

приведенном выше вычислении! Возможны и другие разумные способы оценки.

## Задача 2: «К Солнцу!»

Космический корабль, выведенный на низкую круговую орбиту на высоту  $h = 300$  км над поверхностью Земли, должен был совершить два кратковременных разгонных маневра. В результате этих маневров корабль должен был оказаться на *геостационарной орбите* (ГСО) – это круговая орбита, лежащая в плоскости земного экватора, на которой объект все время находится над одной и той же точкой поверхности Земли.

Первый манёвр был удачно выполнен, и корабль стал двигаться по промежуточной эллиптической орбите с максимальным удалением от центра Земли, равном радиусу ГСО (при этом минимальное расстояние до центра Земли осталось прежним, равным радиусу исходной орбиты).

Второй маневр был рассчитан таким образом, чтобы двигатель включался только один раз, ненадолго, и израсходовал бы треть оставшихся после первого маневра запасов топлива и окислителя. Однако в нужный момент двигатель корабля не сработал. Хотя специалисты сумели найти причину сбоя, и возможность управления кораблем была восстановлена, но попасть в нужную точку на ГСО корабль уже не мог – его миссия закончилась неудачей.

Тогда было решено попробовать совершить другой маневр – перевести часть корабля с промежуточной орбиты на новую орбиту, ведущую на Солнце. Перед началом этого маневра корабль было решено разделить на две части так, чтобы одна часть с двигателем отправилась на Солнце, а вторая часть (как ненужная) осталась летать в космосе. Оказалось, что параметры орбиты позволяют так выбрать момент запуска двигателя и массу отделенной части, что удастся отправить к Солнцу максимально возможную (по массе) часть корабля.

Считаются известными следующие факты.

1. Уравнение орбиты тела, движущегося в гравитационном поле массивного сферически симметричного объекта, имеет в полярных координатах вид  $\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$  (начало

координат совпадает с центром объекта, вокруг которого движется тело). Величина  $p$  называется параметром орбиты, а  $\varepsilon$  – ее эксцентриситетом.

2. Расстояние от Земли до Солнца меняется от  $r_A \approx 152,1$  млн. км (для Афелия, который Земля проходит в июле) до  $r_P \approx 147,1$  млн. км (для Перигелия, который Земля проходит в январе). Радиус Солнца считать равным  $R_S = 0,70$  млн. км. Период обращения Земли вокруг Солнца  $T_0 \approx 3,156 \cdot 10^7$  с. Землю и Солнце можно считать сферически симметричными телами.

3. Радиус Земли –  $R_E \approx 6371$  км. Длительность земных суток  $T = 24 \times 3600$  с = 86400 с. Ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g \approx 9,807$  м/с<sup>2</sup>. Направления вращения Земли вокруг Солнца и вокруг своей оси совпадают. Космический корабль, о котором говорится в условии задачи, был запущен по направлению вращения Земли (как и большинство запускаемых кораблей).

4. Скорость истечения продуктов сгорания из сопла ракетного двигателя составляет  $u = 6$  км/с (относительно корабля). Согласно *формуле Циолковского*, при увеличении скорости корабля на  $\Delta v$  за счет реактивной тяги, масса корабля уменьшается от  $m$  до  $m' = m \cdot e^{-\Delta v / u}$ .



**Ответьте на следующие вопросы.**

1. Вычислите параметр  $p$  и эксцентриситет  $\varepsilon$  промежуточной орбиты (запишите формулы, которые выражают  $p$  и  $\varepsilon$  через величины, заданные в условии задачи, и получите численные значения с ошибкой менее 1 %). Во сколько раз отличаются модули полной механической энергии корабля на первоначальной круговой орбите и на промежуточной орбите? В качестве ответа дайте численное значение отношения  $|E_0 / E_1|$  (с точностью до сотых долей). Для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия корабля с Землей используйте стандартную калибровку, когда точка с нулевой потенциальной энергией располагается на бесконечном удалении от Земли.
2. Подумайте, на каком малом участке промежуточной орбиты должен был работать двигатель для выполнения запланированного первоначально маневра по переходу с промежуточной орбиты на ГСО (ответ на этот вопрос давать не нужно). Каким должно было быть увеличение скорости корабля в результате этого маневра  $\Delta v_2$  (в км/с, с точностью до сотых долей)? Какой должна была стать масса корабля после этого маневра (ответ запишите в процентах от его массы на первоначальной круговой орбите с точностью до целого значения).

**Указание:** при поиске ответов на следующие вопросы для получения результатов с требуемой точностью необходимо в промежуточных вычислениях сохранять не менее четырех значащих цифр.

3. В какое время года (для северного полушария) и в какое примерно время суток нужно запустить двигатель во второй раз, чтобы отправить к Солнцу максимальную по массе часть корабля? В ответе укажите время года (**зима / весна / лето / осень**) и время суток (**восход / полдень / закат / полночь**). Какой должна быть скорость  $v_A$  части корабля, летящей к Солнцу, в системе отсчета Коперника (связанной с центром масс Солнца), после удаления корабля от Земли на расстояние, существенно превышающее  $R_E$ , но много меньшее  $r_A$ ? С какой скоростью  $\tilde{v}_2$  должна двигаться относительно центра масс Земли эта часть корабля сразу после завершения работы двигателя? Запишите обе эти скорости в км/с с точностью до сотых долей.
4. Какую часть массы корабля (в процентах от его массы на первоначальной круговой орбите, с точностью до целого значения), нужно отделить как «ненужную» для возможности выполнения этого маневра? Какую часть массы корабля (в процентах от его массы на первоначальной круговой орбите, с точностью до целого значения) составит та часть, которая долетит до Солнца?
5. Через какое примерно время после завершения работы двигателя разогнанная часть корабля достигнет Солнца? Запишите формулу, выразив время через величины, заданные в условии задачи, и получите численное значение (в земных сутках с точностью до десятых долей).
6. «Гравитационный маневр» – это изменение направления движения и модуля скорости космического корабля в результате его прохождения вблизи очень массивного небесного тела. Допустим, что у нас существует возможность совершения такого маневра около Венеры. Если направить часть корабля на орбиту, перигелий которой окажется вблизи перигелия орбиты Венеры, причем корабль и Венера подойдут к перигелиям своих орбит одновременно, то при правильном расчете маневра корабль, проходя вблизи

Венеры, развернется в сторону Солнца. Рассчитайте максимальный угол, на который может повернуться в сторону Солнца вектор скорости корабля в результате гравитационного маневра вблизи Венеры. Ответ дайте в градусах, с точностью до целого значения. Расстояние от Венеры до Солнца в перигелии  $r_p' \approx 107,5$  млн. км, скорость Венеры вблизи перигелия  $V_p' \approx 35,25$  км/с, первая космическая скорость (скорость движения по круговой орбите у поверхности планеты) для нее  $v_{1V} \approx 7,33$  км/с. Венеру можно считать сферически симметричным телом. Можно ли, используя эту возможность, доставить на Солнце существенно бóльшую часть массы корабля, чем при способе, изученном в пунктах 3 и 4 (ответьте – «да» или «нет»)?

## Возможное решение

1. Найдем радиус ГСО и скорость корабля на этой орбите (обозначим их  $r$  и  $v$ ). Используем уравнение для центростремительной компоненты ускорения корабля на ГСО:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GM_E m}{r^2} = \frac{gR_E^2 m}{r^2}, \text{ откуда } v = R_E \sqrt{\frac{g}{r}}. \text{ С другой стороны, период обращения корабля}$$

должен совпадать с периодом обращения Земли вокруг своей оси, то есть  $\frac{2\pi r}{v} = T$ , откуда

$$r = \sqrt[3]{\frac{gT^2 R_E^2}{4\pi^2}} \approx 42222 \text{ км, а } v = \sqrt[3]{\frac{2\pi g R_E^2}{T}} \approx 3,0705 \text{ км/с. В соответствии с уравнением}$$

орбиты на промежуточной орбите  $R_E + h = \frac{p}{1 + \varepsilon}$  и  $r = \frac{p}{1 - \varepsilon}$ . Из этих соотношений находим:

$$p = \frac{2r(R_E + h)}{r + R_E + h} \approx 11522 \text{ км, и } \varepsilon = \frac{r - R_E - h}{r + R_E + h} \approx 0,727.$$

Договоримся далее символами  $a$  и  $p$  обозначать величины, относящиеся к *апогею* и *перигею* орбиты корабля относительно Земли, а символами  $A$  и  $P$  – к *афелию* и *перигелию* орбит тел относительно Солнца. При движении корабля по эллиптической орбите с заданными расстояниями от центра масс Земли до *перигея* и *апогея* сохраняются полная механическая

энергия и момент количества движения. Поэтому  $\frac{mv_a^2}{2} - \frac{GM_E m}{r_a} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GM_E m}{r_p} = E$  и

$$mr_a v_a = mr_p v_p. \text{ Выражая из этих уравнений скорости, находим, что } v_p^2 = gR_E^2 \frac{2r_a}{r_p(r_a + r_p)} \text{ и}$$

$$v_a^2 = gR_E^2 \frac{2r_p}{r_a(r_a + r_p)}. \text{ Затем получаем выражение для полной механической энергии:}$$

$$E = -\frac{gR_E^2 m}{r_p + r_a}. \text{ С учетом этого находим } \left| \frac{E_0}{E_1} \right| = \frac{r + R_E + h}{2(R_E + h)} \frac{m_0}{m_1}, \text{ где } m_0 \text{ и } m_1 \text{ – значения массы}$$

корабля на первоначальной орбите и на промежуточной орбите.

Так как радиус первоначальной орбиты соответствует расстоянию до перигея промежуточной, то переход происходил путем увеличения скорости корабля от

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E + h}} \approx 7,7247 \text{ км/с до } v_p = \sqrt{\frac{2gR_E^2 r}{(R_E + h)(r + R_E + h)}} \approx 10,152 \text{ км/с за малое время}$$

(включение двигателя по условию было «кратковременным»). Поэтому при анализе разгона можно пренебречь кривизной траектории и действием силы тяжести, и рассматривать разгон корабля только под действием силы реактивной тяги. Значит, можно воспользоваться формулой Циолковского:  $m_1 = m_0 \cdot e^{-\Delta v_1 / u}$ , где  $\Delta v_1 \equiv v_p - v_0 \approx 2,4271$  км/с.

$$\text{Таким образом, } m_1 = 0,66730 \cdot m_0 \text{ и } \left| \frac{E_0}{E_1} \right| = \frac{r + R_E + h}{2(R_E + h)} e^{\Delta v_1 / u} \approx 5,49. \text{ Отметим, что обе эти}$$

энергии отрицательны, то есть на самом деле  $E_0 < E_1$ .

2. Все рассматриваемые орбиты корабля с выключенным двигателем вблизи Земли замкнуты. Поэтому кратковременный разгон для перехода с промежуточной орбиты на

ГСО нужно выполнять непосредственно перед апогеем промежуточной орбиты – при этом достаточно увеличить скорость от величины скорости корабля  $v_a$ , соответствующей этому апогею, до скорости на ГСО (здесь важно обратить внимание, что и в точке апогея промежуточной орбиты, и на ГСО скорость перпендикулярна радиусу). Отметим, что

$$v_a = \sqrt{\frac{2gR_E^2(R_E + h)}{r(r + R_E + h)}} \approx 1,6040 \text{ км/с.}$$

Следовательно, увеличение скорости при выходе на ГСО

должно было составить  $\Delta v_2 \equiv v - v_a \approx 1,4665 \text{ км/с}$ . Снова воспользуемся формулой

Циолковского:  $m_2 = m_1 \cdot e^{-\Delta v_2/u} = m_0 \cdot e^{-(\Delta v_1 + \Delta v_2)/u} \approx 0,52260 \cdot m_0$ . Уменьшение массы

$m_1 - m_2 \approx 0,14470 \cdot m_0$  – это масса топлива и окислителя, которая должна была быть израсходовано при выходе на ГСО с промежуточной орбите. По условию, она составляла треть всего их запаса. Значит, на промежуточной орбите масса топлива и окислителя была равна  $m_F = 0,43410 \cdot m_0$ , Поскольку на промежуточной орбите масса корабля была равна  $m_1 = 0,66730 \cdot m_0$ , то «полезная» масса (двигателя, баков и элементов конструкции) равнялась  $m_u = 0,23321 \cdot m_0$ .

3. Для отправки части корабля на Солнце нужно значительно уменьшить скорость корабля по отношению к Солнцу, поэтому для большей эффективности нужно выбирать момент второго запуска двигателя так, чтобы корабль был близок к точке, в которой его скорость на промежуточной орбите относительно Солнца минимальна. Ясно, что выгоднее взять точку, где скорость Земли относительно Солнца  $V$  минимальна (то есть Земля находится в афелии своей орбиты), а скорость корабля относительно Земли максимальна и направлена против  $\vec{V}_A$ . Значит, при втором маневре двигатель должен работать при подходе к точке перигея своей орбиты, и этот период должен приходиться на лето в северном полушарии, когда Земля находится в Афелии, когда в месте на Земле под кораблем полдень.

Для попадания на Солнце корабль после удаления от Земли должен двигаться вокруг Солнца по орбите, на которой расстояние до афелия примерно равно расстоянию до афелия орбиты Земли, а расстояние до перигелия меньше или равно радиусу Солнца. Тогда скорость корабля относительно Солнца сразу после удаления от Земли на расстояние, существенно превышающее ее радиус (но много меньшее  $r_A \approx 152$  млн. км) должна быть не

больше  $v_A = \sqrt{\frac{2GM_S R_S}{r_A(r_A + R_S)}}$ . Массу Солнца можно оценить по периоду обращения Земли

(вокруг Солнца) и среднему радиусу ее орбиты:

$$V = \frac{\pi(r_A + r_p)}{T_0} \approx \sqrt{\frac{2GM_S}{r_A + r_p}} \Rightarrow 2GM_S \approx \frac{\pi^2(r_A + r_p)^3}{T_0^2}.$$

Итак, нужная скорость равна

$$v_A \approx \frac{\pi(r_A + r_p)}{T_0} \sqrt{\frac{(r_A + r_p)R_S}{r_A(r_A + R_S)}} \approx 2,8273 \text{ км/с.}$$

Скорость Земли в афелии

$$V_A = \sqrt{\frac{2GM_S r_p}{r_A(r_A + r_p)}} \approx \frac{\pi(r_A + r_p)}{T_0} \sqrt{\frac{r_p}{r_A}} \approx 29,2898 \text{ км/с,}$$

поэтому скорость корабля относительно

Земли при выходе на орбиту полета к Солнцу должна быть  $v'_A = V_A - v_A \approx 26,4625 \text{ км/с}$ .

Здесь важно учесть еще одно обстоятельство. После окончания работы двигателя корабль относительно Земли должен двигаться против  $\vec{V}_A$  несколько быстрее  $v'_A$ , так как в процессе

удаления Земля своим гравитационным полем еще немного «подтягивает» его за собой. Этот эффект можно учесть с помощью закона сохранения энергии: скорость отправляемой к Солнцу части корабля (массой  $m_2$ ) сразу после завершения работы двигателя относительно центра масс Земли  $\tilde{v}_2$  определяется

$$\text{уравнением } \frac{m_2 \tilde{v}_2^2}{2} - m_2 g R_E = \frac{m_2 (v'_A)^2}{2} \Rightarrow \tilde{v}_2 = \sqrt{(v'_A)^2 + 2gR_E} \approx 28,7267 \text{ км/с.}$$

4. Увеличение скорости части корабля в ходе маневра по переходу на орбиту полета к Солнцу  $\Delta \tilde{v}_2 \equiv \tilde{v}_2 - v_p \approx 18,575 \text{ км/с}$ . Перед разгоном корабль отбросил часть массы ( $\Delta m$ ), поэтому до Солнца долетит масса  $\tilde{m}_2 = (m_1 - \Delta m) \cdot e^{-\Delta \tilde{v}_2 / u}$ . Для отправки максимальной массы на Солнце корабль должен был израсходовать все запасы топлива и окислителя, поэтому  $m_F = m_1 - \Delta m - \tilde{m}_2 = (m_1 - \Delta m) \cdot (1 - e^{-\Delta \tilde{v}_2 / u}) \Rightarrow \Delta m = m_1 - \frac{m_F}{1 - e^{-\Delta \tilde{v}_2 / u}} \approx 0,21264 \cdot m_0$ . Как следует из вычисления, масса оставшейся части корабля после второго маневра  $\tilde{m}_2 = \frac{m_F}{1 - e^{-\Delta \tilde{v}_2 / u}} e^{-\Delta \tilde{v}_2 / u} = \frac{m_F}{e^{\Delta \tilde{v}_2 / u} - 1} \approx 0,02 \cdot m_0$ . Таким образом, на Солнце с первоначальной орбиты удастся доставить не более 2 % массы корабля!

5. По третьему закону Кеплера отношение квадратов периодов обращений равно кубу отношений больших полуосей орбит. Поэтому период обращения разогнанной части корабля на ее новой орбите  $T' = \left( \frac{r_A + R_s}{r_A + r_p} \right)^{3/2} T_0 \approx 133,3$  суток. Путь до Солнца займет у части

$$\text{корабля половину этого периода, то есть } t = \frac{1}{2} \left( \frac{r_A + R_s}{r_A + r_p} \right)^{3/2} T_0 \approx 66,7 \text{ суток.}$$

6. Для разбора гравитационного маневра нужно провести более общее исследование траекторий тела, движущегося в поле тяжести массивного сферически однородного объекта. Снова обратимся к законам сохранения механической энергии и момента импульса. При движении по орбите  $\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$ , полная энергия корабля

$$E = \frac{m \dot{v}^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)}{2} - \frac{GMm}{\rho} = const, \text{ а момент импульса } L = m \rho^2 \dot{\varphi} = const, \text{ где}$$

точка означает дифференцирование по времени (использованы полярные координаты).

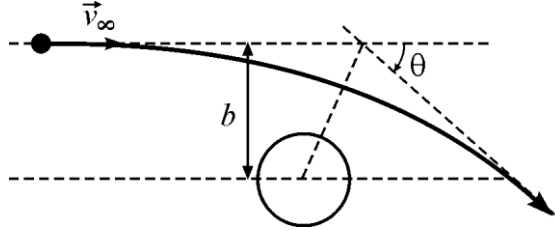
Выразив из второго соотношения  $\dot{\varphi} = \frac{L}{m \rho^2}$  и подставив его в первое, найдем:

$$\frac{E}{m} = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^2}{2m^2 \rho^2} - \frac{GM}{\rho}. \text{ Расстояния до апоцентра и перицентра } r_a = \frac{p}{1 - \varepsilon} \text{ и } r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon}$$

являются корнями уравнения  $\dot{\rho} = 0$ . Поэтому ( $M_V$  – масса Венеры):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{1 - \varepsilon} = -\frac{GM_V m}{2E} - \sqrt{\left( \frac{GM_V m}{2E} \right)^2 + \frac{L^2}{2mE}} \\ \frac{p}{1 + \varepsilon} = -\frac{GM_V m}{2E} + \sqrt{\left( \frac{GM_V m}{2E} \right)^2 + \frac{L^2}{2mE}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{L^2}{GM_V m^2} \\ \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m^3 (GM_V)^2}} \end{array} \right.$$

Когда часть корабля приближается к Венере в области сближения орбит, то в системе отсчета, связанной с Венерой, она «налетает» на Венеру «с большого расстояния» с ненулевой скоростью  $v_\infty$ , то есть ее полная механическая энергия  $E = \frac{mv_\infty^2}{2} > 0$ , и поэтому эксцентриситет орбиты  $\varepsilon > 1$ . В этом случае орбита тела является гиперболой – как видно, при  $\varphi = \pm \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right]$  величина  $\rho \rightarrow \infty$ . Таким образом, угол поворота скорости относительно Венеры  $\theta = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ . В этом случае  $L = mv_\infty b$ , где величина  $b$  (см. рисунок) называется «прицельный параметр».



Как видно, максимальный угол поворота достигается при минимальном эксцентриситете.

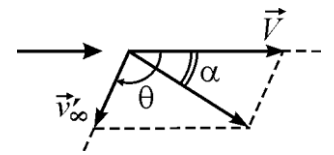
Согласно формуле для эксцентриситета,  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2 v_\infty^4}{(GM_V)^2}}$ , а минимальная величина

прицельного параметра определяется тем соображением, что расстояние до перицентра орбиты от центра Венеры не должно быть меньше ее радиуса  $R_V$ :

$\frac{p}{1 + \varepsilon} \geq R_V \Rightarrow b^2 \geq \left(1 + 2 \frac{GM}{R_V v_\infty^2}\right) R_V^2 = \left(1 + 2 \frac{v_{IV}^2}{v_\infty^2}\right) R_V^2$ . Итак,  $\varepsilon_{\min} = 1 + \frac{v_\infty^2}{v_{IV}^2}$ , и максимальный угол

поворота тела при облете Венеры в ходе маневра  $\theta_{\max} = 2 \arcsin\left[\frac{v_{IV}^2}{v_{IV}^2 + v_\infty^2}\right]$ . Скорость

корабля относительно Солнца после гравитационного маневра есть векторная сумма скорости  $\vec{v}'_\infty$ , повернутой на угол  $\theta$ , и скорости  $\vec{V}$  массивного объекта относительно Солнца. Значит, максимальный угол  $\alpha_{\max}$ , на который может повернуться в сторону Солнца скорость корабля в результате гравитационного маневра можно найти, используя



теорему синусов:  $\sin \alpha = \frac{v_\infty}{|\vec{V} + \vec{v}'_\infty|} \sin \theta$ . Окончательно получаем, что

$$\alpha_{\max} = \arcsin\left(\frac{v_\infty \sin \theta_{\max}}{\sqrt{V^2 + v_\infty^2 + 2Vv_\infty \cos \theta_{\max}}}\right).$$

Определим скорость части корабля в перигелии его орбиты:  $v_P = \sqrt{\frac{2GM_S r_A}{r'_P(r_A + r'_P)}}$ , или

$$v_P = \frac{\pi(r_A + r_P)}{T_0} \sqrt{\frac{r_A(r_A + r_P)}{r'_P(r_A + r'_P)}} \approx 38,0332 \text{ км/с}$$

(напомним, что на орбите полета от Земли к

Венере афелий совпадает с афелием орбиты Земли, а перигелий – с перигелием орбиты Венеры). Значит,  $v_\infty = v_P - V'_P \approx 2,7832 \text{ км/с}$ ,  $V = V'_P \approx 35,25 \text{ км/с}$ , а

$\theta_{\max} = 2 \arcsin \left[ \frac{v_{IV}^2}{v_{IV}^2 + v_{\infty}^2} \right] \approx 121,9^\circ$ . Поэтому  $\alpha_{\max} \approx 4^\circ$ , а для попадания на Солнце при такой скорости угол поворота должен быть, очевидно, близок к  $90^\circ$ . Таким образом, гравитационный маневр около Венеры не может помочь в доставке существенно большей части массы корабля на Солнце.

### Задача 3: «ПЛАНЕТАРНАЯ ГАЗОВАЯ ТУМАННОСТЬ»

Планетарная газовая туманность – это облако газа, удерживаемое силами тяготения ее «ядра» (обычно это достаточно массивная звезда). Если это облако достаточно велико, то мы не видим саму звезду – испускаемый ею свет многократно рассеивается на частицах газа, поглощается ими и затем переизлучается. Поэтому в телескопы мы видим свечение всей туманности. В данной задаче нужно изучить связь между излучением туманности, которое видит внешний наблюдатель, и исходным излучением звезды-ядра. На самом деле в состав подобных туманностей входят различные газы, но больше всего в них содержится водорода. Поэтому мы рассмотрим туманность, состоящую только из атомарного водорода со средней плотностью  $\bar{\rho} = 10^{-20}$  г/см<sup>3</sup>, внешний радиус которой равен  $R = 10^{17}$  см, а внутренний (равный, естественно, радиусу звезды-ядра)  $r_0 = 10^{10}$  см. Приведем также значения физических постоянных, которые могут понадобиться Вам при решении данной задачи:

- скорость света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с;
- элементарный заряд  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;
- масса электрона  $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$  кг;
- постоянная Планка  $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;
- электрическая постоянная  $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;
- число Авогадро  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>;
- постоянная Больцмана  $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Для вычислений Вам могут оказаться полезными следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

При  $b > 4$  можно использовать приближенные формулы:

$$\int_b^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx (b+1)^3 \cdot e^{-b} \text{ с относительной ошибкой порядка } \frac{3}{(b+1)^2};$$

$$\int_b^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx (b+1)^2 \cdot e^{-b} \text{ с относительной ошибкой порядка } \frac{1}{(b+1)^2}.$$

#### Часть I: Излучение звезды и температура газа в туманности.

Несмотря на яркое свечение, звёзды с хорошей точностью можно считать «абсолютно черными телами» – так в физике называют объекты, поглощающие практически всё падающее на них электромагнитное излучение. Нагретые «абсолютно черные тела» сами испускают электромагнитное излучение, спектр которого впервые удалось описать М. Планку, который применил постулат о *квантовании энергии* излучения. Согласно этому постулату, при взаимодействии с атомами и молекулами вещества электромагнитное излучение ведет себя как поток *фотонов*, энергия каждого из которых связана с частотой волны  $\nu$  следующим образом:  $E_\gamma = h \cdot \nu$ . Планк показал, что если излучение, частота которого лежит в узком интервале  $(\nu, \nu + d\nu)$ , находится в равновесии с «абсолютно черным телом» при постоянной температуре  $T$ , то объемная плотность энергии этого излучения равна  $dW = w(\nu) d\nu$ . В последней формуле фигурирует *спектральная*



плотность энергии излучения  $w(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$  – это так называемое распределение

Планка. Полная мощность излучения с единицы площади поверхности такого тела (энергия  $\Delta E_{rad}$ , излучаемая единицей площади за единицу времени) называется полным потоком энергии и может быть найдена из закона Стефана-Больцмана:  $J = \frac{\Delta E_{rad}}{\Delta S \Delta t} = \sigma \cdot T^4$ . Здесь

$\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана.

- 1) Выразите постоянную Стефана-Больцмана через скорость света в вакууме  $c$ , постоянную Планка  $h$  и постоянную Больцмана  $k$ .
- 2) Предположим, что все газовое облако находится в тепловом равновесии с фотонным газом, испускаемым звездой. Найдите для этого случая зависимость температуры газа от расстояния  $r$  до центра звезды при  $r \gg r_0$ . В качестве ответа запишите формулу для отношения  $\frac{T(r)}{T_0}$ , где  $T_0$  – температура поверхности звезды-ядра.

### Часть II: атом водорода.

Взаимодействие атома водорода с фотонами описывается на базе постулатов Бора. Среди состояний электрона вблизи ядра существуют *стационарные* состояния, в которых электрон не обменивается энергией с полем излучения. Поглощение или испускание фотонов происходит при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. По теории Бора, энергии стационарных «связанных» состояний (энергетические уровни электрона в атоме водорода) можно найти с помощью анализа «волновых свойств» электрона: на классической траектории электрона, отвечающей одному из стационарных состояний, должно укладываться целое число длин волн де Бройля  $\lambda_e = \frac{h}{p_e}$ , где  $p_e$  –

импульс электрона. При этом другие значения энергии для электрона полностью запрещены – электрон с «запрещенной» энергией при взаимодействии с ядром перейдет в одно из стационарных состояний, обменявшись энергией с другими объектами – например, испустив фотон.

- 3) Рассмотрите круговые орбиты электрона в атоме водорода, на которых укладываются  $n = 1, 2, \dots$  длин волн де Бройля, и вычислите энергию  $n$ -ого уровня (в ответе приведите формулу; при ее получении считайте, что потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром равна нулю при бесконечном удалении их друг от друга).
- 4) Какой минимальной энергией должен обладать фотон, который может ионизировать атом водорода, находящийся в состоянии с минимальной энергией? Эту величину называют энергией (порогом) ионизации атома водорода. Ответ запишите в электронвольтах (эВ). 1 эВ – единица измерения энергии, численно равная работе электростатических сил при перемещении электрона между точками с разностью потенциалов 1 В.

Мы знаем, что теория Бора лишь приближенно описывает квантовые системы. Однако для уровней энергии атома водорода она по удачному стечению обстоятельств дает ответ, совпадающий с точным ответом, полученным с помощью современной квантовой теории. Этот ответ хорошо согласуется с экспериментальными данными. Состояние с минимальной

энергией ( $n = 1$ ) называют основным, а состояния с  $n > 1$  – возбужденными. Время жизни атома в возбужденном состоянии (то есть время нахождения электрона в стационарном состоянии с  $n > 1$ ) не превышает  $10^{-8}$  с. Затем электрон переходит в одно из нижележащих стационарных состояний, испуская фотон. Наибольшую вероятность имеет переход на соседний энергетический уровень ( $|\Delta n| = 1$ ), переходы с  $|\Delta n| > 1$  менее вероятны.

5) Допустим, что водород находится в равновесии с излучением звезды, температура поверхности которой примерно равна  $T_0 = 30\,000$  К. Укажите номер энергетического уровня, на котором должны преимущественно находиться атомы водорода, если они расположены на расстоянии  $r \gg r_0$  от звезды? Оцените (в процентах, с точностью до целого значения) долю атомов, находящихся в возбужденных состояниях при  $r = 10^5 r_0$ .

б) Какую примерно часть от общего потока энергии излучения звезды составляет поток энергии фотонов, способных ионизировать атомы водорода в туманности, если температура поверхности звезды-ядра равна  $T_0 = 30\,000$  К? Ответ запишите в процентах.

### Часть III. Излучение туманности.

На самом деле даже в стационарной туманности водород не будет находиться в равновесии с излучением звезды – он будет «перерабатывать» это излучение. Основным механизмом «переработки» будет поглощение фотонов с энергией выше порога ионизации. В результате в туманности будет существовать некоторая примесь свободных электронов и протонов (ионов  $H^+$ ). При столкновениях протонов и электронов будут вновь образовываться нейтральные атомы водорода, но уже в возбужденных состояниях. Количество столкновений электронов и ионов в единицу времени пропорционально произведению их концентраций. В результате таких столкновений обычно образуются атомы водорода в разных возбужденных состояниях с достаточно большими  $n$  («захваты» электронов в состояния с  $n = 1, 2$  происходят очень редко). Электроны из этих возбужденных состояний будут за несколько «шагов» переходить в основное состояние, излучая фотоны из спектра атома водорода. Ясно, что эти частоты будут меньше частоты фотона, поглощенного атомом при ионизации. Аналогично атом водорода может поглощать фотоны, переходя в возбужденное состояние (для этого энергия фотона должна быть с высокой точностью равна разности энергий соответствующих уровней), из которого он также постепенно возвращается в основное состояние.

Итак, туманность будет поглощать высокоэнергетичные фотоны, «превращая» каждый из них в несколько фотонов с более низкими энергиями. Нужно отметить, что разброс частот фотонов, излучаемых при одном и том же переходе, очень мал – для условий планетарной газовой туманности он составляет менее сотой доли процента от частоты перехода

$\nu_{n \rightarrow n'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$ . Для дальнейшего отметим, что фотоны, испускаемые в переходах с

уровней с  $n > 1$  на уровень с  $n' = 1$ , называют «лаймановскими» (соответствующие спектральные линии составляют так называемую *серию Лаймана*), а испускаемые при переходах с уровней с  $n > 2$  на уровень с  $n' = 2$  – «бальмеровскими» (линии принадлежат *серии Бальмера*). Фотоны, энергии которых ниже порога ионизации и не равны разности энергий двух стационарных состояний, в основном испытывают почти упругое рассеяние на атомах водорода – их частота почти не изменяется.

7) Вероятность ионизации атома водорода в основном состоянии фотоном с энергией выше порога ионизации характеризуют величиной *сечения фотоионизации*. Эта величина

имеет размерность площади и равна отношению количества фотонов, поглощаемых одним атомом за единицу времени, к плотности потока налетающих фотонов (то есть к числу налетающих фотонов, проходящих через единицу площади волнового фронта за единицу времени). Пусть эта величина для фотонов с энергиями вблизи порога ионизации равна  $\sigma_i \approx 10^{-17} \text{ см}^2$ . Оцените длину свободного пробега фотона с энергией выше порога ионизации (расстояние, которое он в среднем пролетит в веществе туманности до поглощения) в области, где плотность водорода равна средней плотности  $\bar{\rho}$ . Ответ запишите в сантиметрах.

8) Какая часть испущенных звездой фотонов, имеющих энергию выше порога ионизации водорода из основного состояния, будет «переработана» туманностью в фотоны с более низкими энергиями? Ответ дайте в процентах, с точностью до целого значения.

9) Пусть  $\Delta N$  – количество испускаемых звездой за время  $\Delta t$  фотонов с энергией выше порога ионизации водорода из основного состояния,  $\Delta N_{21}$  – количество выходящих за то же время  $\Delta t$  из туманности фотонов с частотами спектральной линии, соответствующей переходу  $(n=2) \rightarrow (n'=1)$  (это «основная» линия серии Лаймана), а  $\Delta N_B$  – общее количество «бальмеровских» фотонов, выходящих из туманности за то же время  $\Delta t$ . Найдите примерно соотношение  $\Delta N_{21} : \Delta N_B : \Delta N$ .

10) Внешний наблюдатель исследует спектр излучения нашей туманности. Изобразите на рисунке (качественно) график регистрируемого им спектра (то есть нарисуйте ход зависимости  $\frac{dI}{d\nu} \equiv s(\nu)$ , где  $dI$  – интенсивность регистрируемого излучения,

приходящегося на интервал частот  $d\nu$ ). Укажите на графике его основные особенности.

11) Наблюдатель установил, что интенсивность излучения туманности на частоте основной спектральной линии серии Лаймана  $\nu_{21}$  составляет 10 % от интенсивности излучения туманности в диапазоне частот  $\frac{2}{3}\nu_{21} \leq \nu < \nu_{21}$  (если в последней суммарной

интенсивности не учитывать излучение на частоте самой спектральной линии). Чему равна температура  $T_x$  поверхности звезды-ядра в наблюдаемой туманности? В качестве первого ответа приведите полученное Вами уравнение для определения  $T_x$  (это должно быть алгебраическое уравнение, не содержащее других неизвестных величин, кроме  $T_x$ ). В качестве второго ответа на данный вопрос приведите полученное в результате численного решения этого уравнения значение  $T_x$  в кельвинах, с ошибкой не более 500 К.

Теперь нам ясно, что часть водорода в туманности будет находиться в ионизированном состоянии. Интересно выяснить, как зависит степень ионизации газа (отношение количества ионизированных атомов к полному количеству атомов) от расстояния до поверхности звезды. Для упрощения анализа Вам предлагается использовать модель, согласно которой в области с заметной ионизацией выполняются два предположения:

- убывание потока фотонов с энергиями выше порога ионизации водорода происходит в основном за счет их поглощения нейтральными атомами (а не за счет увеличения площади, по которой они распределяются);
- плотность водорода изменяется (при изменении указанного расстояния) значительно медленнее, чем степень ионизации, так что плотность можно считать примерно равной средней плотности туманности.

Также используйте информацию из введения к части III.

12) Предположим, что степень ионизации водорода вблизи поверхности звезды очень высока и равна 99 %. На каком расстоянии  $l_1 \equiv r_1 - r_0$  от поверхности звезды степень ионизации станет равна 90 % (первый ответ –  $l_1$ ), 50 % (второй ответ –  $l_2$ ), 10 % (третий ответ –  $l_3$ )? Все три ответа запишите в см.

## Возможные решения и ответы

1) Полная объемная плотность энергии излучения, находящегося в равновесии с поверхностью нагретого тела, вычисляется интегрированием по всему спектру:

$$W = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{v^3}{e^{hv/kT} - 1} dv = \frac{8\pi h}{c^3} \left( \frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{h^3 c^3}$$

условия. Чтобы найти поток энергии от поверхности, нужно заметить, что «равновесное» излучение идет из каждой точки равномерно во все стороны со скоростью света. Поэтому на каждый элемент телесного угла  $d\Omega$  приходится поток энергии  $dJ = \frac{cW}{4\pi} d\Omega$ . Пусть угол

$\vartheta$  отсчитывается от перпендикуляра к поверхности. Уходящее излучение идет в интервале углов  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ , а элемент телесного угла между конусами с углами раствора  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$

равен  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ . Тогда полный поток энергии вдоль перпендикуляра к поверхности равен  $J = 2\pi \frac{cW}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{cW}{4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4$ . Сравнивая это выражение с законом

Стефана-Больцмана, получаем:  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$ .

2) В равновесном состоянии туманности поток энергии от звезды наружу постоянен и равен потоку с поверхности звезды. Если бы слой газа на расстоянии  $r \gg r_0$  от звезды находился бы в тепловом равновесии с излучением, то он излучал бы «наружу» точно такой же поток, какой поглощал «изнутри». В соответствии с законом Стефана-Больцмана, его температура определялась бы из соотношения  $\sigma \cdot T^4(r) \cdot 4\pi r^2 = \sigma \cdot T_0^4 \cdot 4\pi r_0^2$ . Отсюда

$$\frac{T(r)}{T_0} = \sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

3) Для круговых орбит условие Бора дает:  $\frac{2\pi r}{\lambda} = n \ (n \in Z)$ , откуда  $r \cdot p = m_e v r = \frac{h}{2\pi} \cdot n$ .

Если записать классическое уравнение движения электрона по орбите радиуса  $r$  со скоростью  $v$ , то для атома водорода получим:  $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , откуда  $r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2}$

$m_e v r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v} = n \frac{h}{2\pi}$ . Поэтому скорость электрона на орбите и радиус орбиты равны

$v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}$ ,  $r = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e e^2}$ . Значит, энергия электрона в атоме водорода на стационарной

орбите  $E_n = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$ .

4) Для ионизации атома нужно удалить его на очень большое расстояние от ядра, туда, где  $E = 0$ , то есть перевести электрон из состояния с  $n=1$  в состояние с  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому

порог ионизации атома водорода  $E_i = -E_1 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \approx 13,6$  эВ.

5) В соответствии с результатом п. 2, «равновесная» температура газа при  $r = 10^5 r_0$  оказывается равной  $T(r) = T_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}} \approx 95$  К. Энергия хаотического теплового движения атомов

водорода при такой температуре  $\frac{3}{2}kT \approx 0,012$  эВ. Энергия, необходимая для перехода в

нижнее возбужденное состояние (с  $n = 2$ )  $\Delta E_{21} = E_2 - E_1 = \frac{3m_e e^4}{32\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{3}{4} E_i \approx 10,2$  эВ почти в

тысячу раз больше! Ясно, что вероятность перехода в возбужденное состояние очень мала, практически ничтожна – явно заметно меньше одного процента! Участники, знакомые с распределением Больцмана, могут оценить эту вероятность более строго: она порядка  $e^{-\Delta E_{21}/kT} \approx 10^{-541}$ . То есть на указанном расстоянии от такой звезды возбужденные атомы в газе практически бы отсутствовали.

б) Фотоны, способные ионизировать атомы водорода, должны иметь энергии  $h\nu \geq hv_i = E_i \approx 13,6$  эВ. Для  $T_0 = 30000$  К получаем, что  $\varepsilon \equiv \frac{hv_i}{kT_0} = \frac{E_i}{kT_0} \approx 5,28$ . Распределение

фотонов по энергии описывается распределением Планка, поэтому искомая доля фотонов равна  $\delta = \left( \int_{v_i}^{\infty} w(v) dv \right) / \left( \int_0^{\infty} w(v) dv \right)$ . Таким образом, с учетом информации из условия,

$$\delta = \frac{15}{\pi^4} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx \frac{15}{\pi^4} (\varepsilon + 1)^3 e^{-\varepsilon} \approx 0,194 \pm 0,015. \text{ Разумный ответ: } \tau_m \sim 20 \%.$$

7) Концентрация атомов водорода при средней плотности  $\bar{\rho}$  равна  $\bar{n} = \frac{\bar{\rho}}{m_H}$ , где  $m_H$  –

масса одного атома. Эту массу можно выразить через число Авогадро: очевидно, что  $m_H = \frac{1 \text{ г/моль}}{N_A} \approx 1,7 \cdot 10^{-24}$  г. Значит,  $\bar{n} \approx 6 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Для оценки можно считать, что каждый

атом создает для фотонов «ловушку» сечением  $\sigma_i$ . Тогда длина свободного пробега фотона соответствует ситуации, когда эти «ловушки» перекрывают все сечение потока:

$$\bar{n} \cdot S \cdot l_\gamma = \frac{S}{\sigma_i}, \text{ откуда } l_\gamma = \frac{1}{\sigma_i \bar{n}} \approx 1,7 \cdot 10^{13} \text{ см.}$$

8) Как видно, радиус туманности примерно в 6 тысяч раз превышает «среднюю» длину свободного пробега фотонов. Это означает, что практически все фотоны (при округлении до целого значения – 100%) фотонов с энергией выше порога ионизации будут поглощены атомами и переработаны в фотоны более низких энергий. (Отметим, что, как было замечено в п. 6,  $\varepsilon \equiv \frac{E_i}{kT_0} \approx 5,28$ , то есть энергия ионизации лежит выше максимума

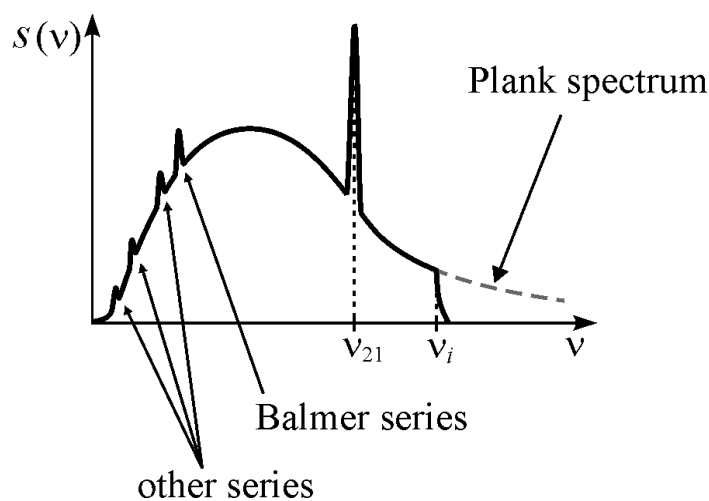
$E_m \approx 2,84 \cdot kT_0$  в распределении фотонов по энергиям, и с ростом энергии фотонов их вклад в общий поток энергии довольно быстро убывает, так что изменение сечения ионизации с ростом энергии не должно существенно изменить результат этой оценки).

9) Как установлено в п. 8, практически все фотоны с энергиями выше энергии ионизации поглощаются туманностью. Каждый такой поглощенный фотон запускает цепочку переходов. Если первый переход после захвата случился в состояние с  $n = 1$ , то при этом испускается фотон серии Лаймана, который затем практически наверняка

поглотится другим атомом водорода (ибо подавляющее большинство атомов водорода в туманности находятся в основном состоянии, то есть для них энергия лаймановского фотона соответствует разрешенному переходу, а длина свободного пробега фотонов много меньше радиуса туманности). Атом, который поглотит этот фотон, возвратится в то же возбужденное состояние. Такой процесс будет продолжаться до тех пор, пока не произойдет переход в состояние с  $n \neq 1$ . Если первый переход после захвата случился в состояние с  $n = 2$ , то испускается фотон серии Бальмера, а дальше обязательно последует испускание фотона основной линии серии Лаймана с частотой  $\nu_{21}$ . Бальмеровские фотоны практически не поглощаются (так как в туманности крайне низка доля атомов водорода, находящихся в состоянии с  $n = 2$ ) и уходят из туманности после многих упругих рассеяний. Фотоны основной линии серии Лаймана множество раз поглощаются и переизлучаются, пока тоже не покинут туманность. Если первый переход случился на уровень с  $n > 2$ , то ситуация «повторяется» – мы снова имеем «высоковозбужденное» состояние, из которого атом перейдет либо в состояние с  $n = 1$ , либо в состояние с  $n = 2$ , либо в состояние с  $n > 2$ . Поэтому каждый поглощенный высокоэнергетичный фотон **обязательно «породит» на выходе из туманности один бальмеровский фотон и один фотон основной линии серии Лаймана** (плюс какое-то количество фотонов других серий с еще меньшей энергией). Вклад бальмеровских фотонов и фотонов основной линии серии Лаймана, «изначально» испущенных звездой, очень мал из-за малой ширины линии и конечной спектральной плотности теплового излучения. Итак,  $\Delta N_{21} : \Delta N_B : \Delta N \approx 1 : 1 : 1$ .

10) Наблюдаемый внешним наблюдателем спектр излучения туманности – это спектр излучения звезды, практически совпадающий с планковским спектром, соответствующим ее температуре, с учетом «переработки» излучения туманностью. Как видно из пунктов 8 и 9, в результате практически полного поглощения фотонов с энергиями выше порога ионизации, тепловой спектр будет «обрезан» сверху на частоте  $\nu_i = \frac{E_i}{h}$ . Энергия,

испускаемая в этой части спектра, преобразуется в основном в энергию фотонов основной линии серии Лаймана (энергия этого фотона составляет до 75 % от энергии «переработанного» фотона), меньше – в фотоны серии Бальмера, еще меньше – в более низкочастотные фотоны других серий. Поэтому характерный график должен выглядеть примерно так, как показано на рисунке.



11) В заданном интервале частот  $\Delta\nu$  **нет** спектральных линий водорода (кроме линии Лаймана, вклад которой в интенсивность не учитывается), и поэтому интенсивность в этом интервале частот определяется «непереработанным» излучением звезды.

$$I(\Delta\nu) = \pi c r_0^2 \int_{2\nu_{21}/3}^{\nu_{21}} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT_x} - 1} d\nu = \frac{8\pi^2 r_0^2 (kT_x)^4}{c^2 h^3} \int_z^{\nu_{21}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx$$

$$\approx \frac{8\pi^2 r_0^2 (kT_x)^4}{c^2 h^3} \left[ (z+1)^3 e^{-z} - \left(\frac{3z}{2} + 1\right)^3 e^{-3z/2} \right].$$

Здесь  $z \equiv \frac{2 h\nu_{21}}{3 kT_x} \approx \frac{79000 \text{ К}}{T_x}$ , а коэффициент пропорциональности записан с учетом того,

что мощность излучения с единицы площади поверхности звезды связана со спектральной плотностью энергии соотношением  $J = \frac{cW}{4}$  (см. п. 1). Отметим, что точное вычисление

коэффициента пропорциональности не обязательно – он все равно сократится. Интенсивность излучения на частоте  $\nu_{21}$  определяется тем условием, что число выходящих из туманности фотонов с этой частотой равно числу испускаемых звездой фотонов с энергией выше порога ионизации. Поэтому

$$I(\nu_{21}) = \pi c r_0^2 \cdot h\nu_{21} \int_{\nu_i}^{\infty} \frac{1}{h\nu} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT_x} - 1} d\nu = \frac{8\pi^2 r_0^2 (kT_x)^3 \nu_{21}}{c^2 h^2} \int_{2z}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx$$

$$\approx \frac{8\pi^2 r_0^2 (kT_x)^3 \nu_{21}}{c^2 h^2} (2z+1)^2 e^{-2z}.$$

В этой выкладке учтено, что  $\nu_i = \frac{4}{3}\nu_{21} = 2 \cdot \frac{2}{3}\nu_{21} \Rightarrow \frac{h\nu_i}{kT_0} = 2z$ . В соответствии с данными

наблюдателя,  $\frac{I(\nu_{21})}{I(\Delta\nu)} = \frac{1,5z(2z+1)^2 e^{-z/2}}{(z+1)^3 e^{z/2} - (1,5z+1)^3} = 0,1$ . Это и есть уравнение для определения

$z$ , а затем  $T_x \approx \frac{79000 \text{ К}}{z}$ .

Это уравнение следует решать численно, вычисляя значения  $f(z) \equiv \frac{1,5z(2z+1)^2 e^{-z/2}}{(z+1)^3 e^{z/2} - (1,5z+1)^3}$

для разных  $z$  и сравнивая с 0,1 (эффективнее использовать метод дихотомии, или – при возможности использования Excel или программируемого калькулятора – просто смотреть значения  $f(z)$  в «ожидаемом» диапазоне):

$z$	$f(z)$
3,7	0,1623462
3,8	0,1437476
3,9	0,1275049
4,0	0,1132782
4,1	0,1007847
4,2	0,0897873
4,3	0,0800860
4,4	0,0715114

Как видно, «подходящее» значение  $z \approx 4,1$ . Следовательно,  $T_x \approx 19250 \text{ К}$ .



12) Равновесная степень ионизации устанавливается, когда количество ионизаций в «тонком слое» газа в единицу времени (равное количеству поглощенных фотонов с энергией выше порога ионизации) равно количеству «захватов» электронов протонами (*рекомбинаций*). Поток таких фотонов с увеличением расстояния от поверхности звезды убывает не только за счет увеличения площади поверхности, но и за счет поглощения:  $I(r) \cdot 4\pi r^2 - I(r+dr) \cdot 4\pi(r+dr)^2 = I(r)\sigma_i n_1 \cdot 4\pi r^2 dr$ . Здесь  $n_1 = n_1(r)$  – концентрация атомов водорода, поглощающих такие фотоны (неионизированных). Таким образом,  $\frac{dI}{dr} = -\left(\frac{2}{r} + \sigma_i n_1\right)I \approx -\sigma_i n_1 I$ , в соответствии с предположением используемой модели.

Интегрирование этого соотношения дает:  $I(r) \approx I_0 \cdot \exp(-\sigma_i \int_{r_0}^r n_1 dr)$ . Количество

поглощаемых в единицу времени фотонов пропорционально  $\sigma_i n_1 I(r)$ . Количество захватов пропорционально произведению концентраций электронов  $n_e$  и ионов водорода  $n_i$ , которые равны друг другу, так как слой в целом при ионизации остается нейтрален. Итак,  $n_1 \cdot \exp(-\sigma_i \int_{r_0}^r n_1 dr) = const \cdot n_e \cdot n_i = const \cdot n_i^2$ . Если степень ионизации  $\frac{n_i}{n} \equiv y$ , то  $n_1 = (1-y)n$ .

По условию степень ионизации изменяется заметно быстрее, чем концентрация атомов, так что  $\frac{y^2}{1-y} \approx const \cdot \exp\left(-\frac{1}{l_\gamma} \int_{r_0}^r (1-y) dr\right)$ , где  $l_\gamma = \frac{1}{\sigma_i n}$  – вычисленная в п. 7 длина свободного

пробега фотона. Прологарифмировав это соотношение, а затем продифференцировав его, получаем:  $\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = -(1-y) \frac{dr}{l_\gamma}$ , то есть  $dr = -l_\gamma \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{1-y}\right) \frac{dy}{1-y}$ .

выражения от поверхности звезды до заданного радиуса дает:  $r - r_0 = l_\gamma \cdot \left[2 \ln\left(\frac{y_0(1-y)}{(1-y_0)y}\right) + \frac{1}{1-y_0} - \frac{1}{1-y}\right]$ . Здесь  $y_0 \approx 0,99$  – заданная степень ионизации

вблизи поверхности звезды. Из этой формулы находим:  $l_1 \approx l_\gamma [90 + 2 \ln(11)] \approx 1,6 \cdot 10^{15}$  см,  $l_2 \approx l_\gamma [98 + 2 \ln(99)] \approx 1,8 \cdot 10^{15}$  см, и  $l_3 \approx l_\gamma \left[\frac{890}{9} + 2 \ln(891)\right] \approx 1,9 \cdot 10^{15}$  см. Видно, что к

расстоянию  $l = 2 \cdot 10^{15}$  см степень ионизации становится меньше 1%! То есть на расстоянии от звезды, составляющем ~1% радиуса туманности ( $10^{15}$  см), степень ионизации остается очень высокой, а на расстоянии ~2% – уже падает почти до нуля. Такое поведение явно подтверждает предположение нашей модели, что степень ионизации меняется заметно быстрее, чем растет площадь поверхности сферы, и чем убывает плотность облака. На самом деле ясно, что концентрация атомов вблизи звезды все-таки повыше, чем на периферии туманности, и поэтому в области с  $r < 2 \cdot 10^{15}$  см длина свободного пробега фотона меньше «средней», которую мы использовали в расчетах, так что в реальности область с существенной ионизацией еще сильнее «прижата» к звезде.