ОЛИМПИАДА МЕГАПОЛИСОВ
Москва, 2 сентября 2019

1. Предположим, что G — это граф, состоящий из 101 вершины и 100 ребер. Какие из следующих утверждений могут быть справедливы?
   1) G содержит циклы. Комментарий. Это возможно. Например, цикл из 100 вершин и 100 ребер и отдельностоящая вершина.
   2) G не содержит циклов. Комментарий. Это также возможно. Например, все 101 вершина расположены в ряд и соединены ребрами.
   3) G — это дерево. Комментарий. Если граф не содержит циклов и связен, то он является деревом. Пример из п. 2 подходит.
   4) G — это связный граф. Комментарий. Этот вариант также подходит, пример см. в п. 2.

2. ABC -> ABCBB -> AB -> BBAB -> BAABAB -> BAB -> пустая строка. За меньшее число операций ответ получить нельзя, так как для удаления каждой из трех различных букв придется добавить две таких же, а чтобы сократить 9 символов нужно как минимум три действия.
   Ответ 6.

3. Какие из следующих утверждений истинны?
   1) DNS, используемая в ОС компьютера, позволяет идентифицировать другие компьютеры.
   Комментарий. Это утверждение не корректное, так как DNS не является частью операционной системы компьютера.
   2) Для того чтобы присоединиться к интернету, компьютер должен иметь уникальный числовой код, называемый IP-адресом.
   Комментарий. Это утверждение верное.
   3) Интернет-протокол версии 4 (IPv4) определяет IP-адрес как 32-битное число, а IPv6 как 64-битное.
   Комментарий. Это утверждение не верное, так как IPv6 определяет IP-адрес как 64-битное число.

4. С помощью 10 цифр в двоичной системе счисления можно представить числа от 0 до $210 - 1 = 1023$.
   Ответ: 1023.

5. Здесь берется входная строка без первого символа, имеющего индекс 0, к ней приписывается начало строки, состоящее из первых двух символов ввода, и, наконец, каждый третий символ исходной строки, начиная с нулевого.
   Ответ: egapolismemal.

6. Определите вывод следующей программы:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int n = 100;
int answer = 0;
void f(int l, int r, int ql, int qr) {
    ++answer;
    if (qr < l || ql > r)
        return;
    if (ql <= l && qr >= r)
        return;
    int mid = (l + r) >> 1;
    f(l, mid, ql, qr);
    f(mid + 1, r, ql, qr);
}
int main() {
    int l = 2, r = 33;
    f(1, n, l, r);
    cout << answer << endl;
}
```

   Ответ: 25

7. Дерево высотой один состоит из одной вершины, два – максимум трех, три – семи вершин, ..., k – 2k – 1 вершин. 210 – 1 < 2019 < 211 – 1, поэтому минимально возможная высота дерева из 2019 элементов равна 11.
Ответ: 11.

8. Для n = 1 игра заканчивается в один ход (выигрывает Паша). При n = 2 первый ход может быть только 1, после вычитания единицы останется число 1, поэтому на следующем ходу выигрывает Вова. При n = 3 единственный ход также равен 1 и Вова оказывается в проигрышной позиции. При n = 4 есть два хода, выигрышный из которых 2 – Вова опять окажется в проигрышной позиции. При n = 5 единственный ход приводит к выигрышу второго игрока (позиция проигрышная), тогда 6 – выигрышная и т.д. Так как все делители нечетных чисел нечетны, то из нечетного числа можно перейти только в позицию с четным числом, а такая позиция для всех n > 2 выигрышная, но уже для второго игрока, поэтому нечетные позиции для n > 3 проигрышные, а четные – выигрышные, так как из них всегда можно перейти в позицию n – 1 (проигрышную для второго игрока).
Ответ: Петя выигрывает для чисел 3, 2018, 2020.

9. Между четырьмя различными вершинами можно провести 6 ребер, поэтому общее число графов на четырех вершинах равно 26 = 64. Подсчитаем число несвязных графов:
• три вершины образуют связную компоненту (4-мя способами) + отдельностоящая вершина; всего таких графов $4 \times 4 = 16$;
• две связные компоненты по две вершины – 3 варианта;
• две вершины соединены, а две другие – нет: 6 вариантов;
• ребер в графе нет – 1 вариант.
Ответ: 64 – (16 + 3 + 6 + 1) = 38.

10. Двумя битами можно закодировать элементы множества, состоящего до 4х элементов, поэтому правильный ответ 1 – три различных элемента. Для вариантов 2, 4 достаточно одного бита, а для варианта 3 двух битов недостаточно.
Ответ: 1 (1, 2, 3).

11. Быстрая сортировка — это часто используемый алгоритм. Его сложность времени выполнения в среднем $O(nlogn)$, сложность для лучших входных данных $O(nlogn)$, сложность для худших входных данных $O(n^2)$.
Ответ: 3.

12. Функция what переводит число из строкового представления в числовое, поэтому "180" будет переведено в 180, а "AB" в $(65 - 48) * 10 + 66 - 48 = 188$.
Ответ: 188.

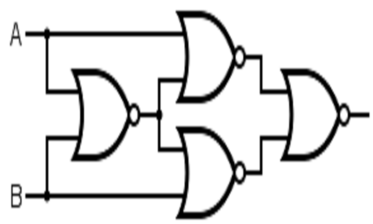
13. Вычислим каждое выражение сначала в двоичной системе, а затем запишем максимальное из них в десятичной.
1) $1101_2 + 1011\ 0001\ 1100_2 - 10\ 0110_2 = 1011\ 0000\ 0011_2 = B03_{16} = 2819_{10}$
2) $1010\ 1011\ 1000_2 + 1\ 010\ 111_2 + 1000_2 = 101100010111_2 = B17_{16} = 2839_{10}$
Ответ: 2839.

14. Первые две цифры года равны номеру дня, записанному в обратном порядке. Максимальное число, меньшее 20, полученное таким образом – 13. Последние две цифры года – номер месяца в обратном порядке. Максимальное такое значение 90 (получено из 09 месяца), но в сентябре нет 31-го числа, поэтому последние две искомые цифры равны 80.
Ответ: 1380.

15. В десятичной системе приведенная последовательность выглядит как 3. 9, 27, 81, что соответствует последовательным степеням тройки. Следующая степень тройки равна 24310 = 3638.
Ответ: 363.

16. Заметим, что $x \times y = gcd(x, y) \times lcm(x, y)$
Поэтому,
$x \times y = 15 \times 150 = 2250$
$x + y = 105$
$(105 - y) \times y = 2250$
$y2 - 105y + 2250 = 0$
$(y - 75)(y - 30) = 0$
Мы получаем два решения:
$y = 75, x = 30$
$y = 30, x = 75$
$|x - y| = 45$
Ответ: 45.

17. not (A xor B) = (A NOR (B NOR B)) NOR (A NOR B) NOR B) = (A NOR (A NOR B)) NOR (B NOR (A NOR B))
Минимальное число логических элементов NOR для построения логической схемы для XNOR равно:



Ответ: 4.

18. Как много звездочек она напечатает, если мы вызовем binom(7,4)?
Ответ: 69.

19. Эта задача эквивалентна подсчету числа перестановок, в которых никакой элемент не появляется на своем месте. Пусть первый гость дарит подарок гостю i. Существует $n - 1$ способ сделать это. Далее есть два варианта: гость i дарит подарок гостю 1 или другому гостю. В первом случае мы свели задачу к той же, но для $n - 2$ гостей, а во втором для $n - 1$ гостя и $n - 1$ подарка, так как один из гостей подарок уже получил. Таким образом, ответ для n гостей выражается так: $f(n) = (n - 1)(f(n - 1) + f(n - 2))$
$f(1) = 0$
$f(2) = 1$
$f(3) = (3 - 1)(1 + 0) = 2$
$f(4) = (4 - 1)(2 + 1) = 9$
$f(5) = (5 - 1)(9 + 2) = 44$
$f(6) = (6 - 1)(44 + 9) = 265$
$f(7) = (7 - 1)(265 + 44) = 1854$
Ответ: 1854.