1. В качестве метода нахождения пары (x, y), удовлетворяющей этому уравнению, можно использовать расширенный алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned}
&51 = 31\cdot 1+20, && 20 = 51-31\\
&31 = 20\cdot 1+11, && 11 = 31-20 = 31\cdot 2-51\\
&20 = 11\cdot 1+9, && 9 = 20-11 = 51\cdot 2-31\cdot 3\\
&11 = 9\cdot 1+2, && 2 = 11-9 = 31\cdot 5-51\cdot 3\\
&9 = 2\cdot 4+1, && 1 = 9-2\cdot 4 = 51\cdot 14-31\cdot 23
\end{aligned}$$

Теперь мы можем, например, разложить $12 = 1+11 = 51\cdot 13-31\cdot 21$, получив частное решение $x_0 = 13$, $y_0 = 21$.

Из теории линейных диофантовых уравнений мы знаем, что все целые решения нашего уравнения имеют вид $x = 13+31k$, $y = 21+51k$, где k целое. Так как при отрицательных k получаются отрицательные x и y, наименьшее значение $x+y = 34+82k$ равно 34.

2. Чтобы показать, что первые три вывода некорректны, приведем пример последовательности $\{a_n\}$, для которой они не выполняются:

$$a_n = b_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n},$$
$$\text{т. е.}\quad \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$$

Чтобы доказать, что четвертый вывод корректен, построим такую последовательность $\{k_m\}$ по $\{b_n\}$. Если в последовательности $\{b_n\}$ есть бесконечно много нулей, выберем $\{k_m\}$ так, чтобы $b_{k_m} = 0$. В противном случае построим последовательность $\{k_m\}$ индуктивно: сначала выберем $k_1 = \max\{n\colon b_n = 0\}+1$ (т. е. «пропустим» все нули в $\{b_n\}$); далее, если известно k_m, найдем N такое, что для всех $n > N$ выполнено $b_n < b_{k_m}$, и возьмем $k_{m+1} = \max(N, k_m)+1$.

3. Приведем пример таблицы с 7 нечетными числами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & -1 & & & \\
 & & -1 & & 0 & & \\
 & 0 & & -1 & & 1 & \\
1 & & -1 & & 0 & & 1
\end{array}$$

Чтобы доказать, что больше 7 нечетных чисел получить нельзя, обозначим числа таблицы следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & z_3 & & & \\
 & & z_1 & & z_2 & & \\
 & x_3 & & t & & y_3 & \\
x_1 & & x_2 & & y_1 & & y_2
\end{array}$$

Заметим, что среди чисел x_1, x_2, x_3 есть хотя бы одно четное, так как все числа в $x_3 = x_1+x_2$ не могут быть нечетными. Аналогично, хотя бы одно нечетное число есть среди y_1, y_2, y_3, и ещё хотя бы одно среди z_1, z_2, z_3. Получаем, что четных чисел хотя бы три.

4. Обозначим центры шаров соответственно за C_i. Рассмотрим прямоугольную трапецию $A_1C_1C_2A_2$. По теореме Пифагора имеем
$$A_1A_2^2 + (C_1A_1 - C_2A_2)^2 = C_1C_2^2\,.$$
Так как $C_iA_i = r_i$ и $C_1C_2 = r_1 + r_2$, получаем
$$A_1A_2^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 = 4r_1r_2\,,$$
с аналогичными тождествами для A_1A_3 и A_2A_3. Это позволяет нам переписать данные в задаче равенства в виде
$$r_1r_2 = \frac{4^2}{4} = 4\,, \quad r_2r_3 = \frac{6^2}{4} = 9\,, \quad r_1r_3 = \frac{8^2}{4} = 16\,.$$
Перемножая первые два равенства и деля на третье, получаем $r_2^2 = 9/4$.

5. Обозначим скорость течения за v (в км/ч). Лодка прошла вниз по течению за $30/(15+v)$ часов, а вверх вернулась за $30/(15-v)$ часов. Имеем
$$4{,}5 = \frac{30}{15+v} + \frac{30}{15-v}\,.$$
Домножая на $(15+v)(15-v)$, получаем
$$4{,}5(15^2 - v^2) = 30(15-v) + 30(15+v)\,,$$
что после раскрытия скобок дает $4{,}5v^2 = 112{,}5$, приводя к ответу $v = 5$.

6. Сразу отметим, что прямая EF является биссектрисой угла AEB.

   Отметим произвольную точку D на продолжении CB за B (рис. 1).

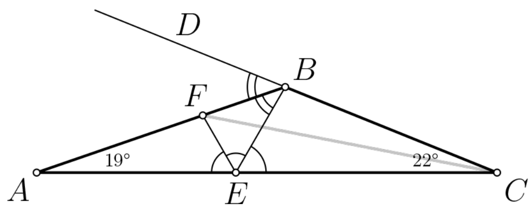

Рис. 1: for the problem 6.

   Имеем $\angle EBD = \angle ECB + \angle BEC = 82°$ и $\angle ABD = \angle ACB + \angle BAC = 41°$, из чего следует, что BA — биссектриса угла EBD.

   Получается, что внешние биссектрисы из вершин B и E треугольника BCE пересекаются в точке F. Но тогда и внутренняя биссектриса угла C этого треугольника тоже должна проходить через F, откуда $\angle ACF = 11°$. Теперь нетрудно получить ответ: $\angle BFC = \angle ACF + \angle FAC = 30°$.

7. Угол между p и стороной AC равен $65°$ (это угол между касательной и хордой), а угол между q и AC равен $20°$ (из-за параллельности q и AB). Следовательно, угол между p и q равен $65° - 20° = 45°$.ан треугольник ABC. Прямая p — касательная к его описанной окружности в точке C. Прямая q проходит через точку C параллельно AB. Если угол CAB равен $20°$, а угол ABC равен $65°$, чему равен угол между прямыми p и q? (По определению, угол между прямыми острый или прямой.) Ответ дайте в градусах.

8. Сначала предположим, что вершины A и B квадрата, лежащие на окружности, не являются соседними. Тогда прямая через другие две вершины является серединным перпендикуляром к AB и содержит центр окружности, то есть не может быть касательной, противоречие. Обозначим две другие вершины квадрата за C и D (так что сам квадрат — $ABCD$), центр окружности за O, а точку касания CD с окружностью за M. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к AB ясно, что M является серединой CD.

   Обозначим середину AB за N. Тогда $NA = x/2$ и $ON = NM - OM = x - 5$, где x — длина стороны квадрата. По теореме Пифагора, пользуясь $OA = 5$, получаем $(x/2)^2 + (x - 5)^2 = 5^2$, что после раскрытия скобок дает $\frac{5}{4}x^2 - 10x = 0$. Так как $x = 0$ невозможно, отсюда следует $x = 8$. Площадь квадрата, таким образом, равна $x^2 = 64$.

9. Обозначим пересечение CK и AL за T (рис. 2), а меру угла KCA за α.

   Заметим, что CK содержит медиану, проведенную к гипотенузе в треугольнике ALC, откуда следует $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$. Далее получаем $\angle LAB = \alpha$, $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$, и $\angle BCK = 180^\circ - 2\angle KBC = 4\alpha$. Следовательно, $\angle BCA = 5\alpha$, откуда находим $\alpha = 18^\circ$ и ответ $\angle ABC = 54^\circ$.

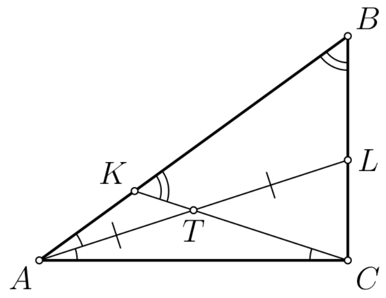

Рис. 2: к задаче 9.

10. Заметим, что длины x и y сторон прямоугольника являются корнями уравнения

$$t^2 - \frac{P}{2}t + S = 0$$

с дискриминантом $D = P^2/4 - 4S$; это означает, что для данных положительных P и S соответствующий прямоугольник существует тогда и только тогда, когда $P^2/16 \geq S$. Объединяя это с данным в задаче соотношением, получаем

$$\frac{P^2}{16} \geq \frac{P^2}{6} - 3P + 12\,,$$
$$5P^2 - 144P + 576 \leq 0\,,$$
$$(5P - 24)(P - 24) \leq 0\,.$$

Значит, $P \in [\frac{5}{24}, 24]$.

Квадрат диагонали можно найти по формуле

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \frac{P^2}{4} - 2S$$
$$= \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{3} + 6P - 24 = -\frac{1}{12}P^2 + 6P - 24\,.$$

Это выражение принимает наибольшее значение в вершине параболы $P = 36$, которая находится за пределами диапазона $[\frac{5}{24}, 24]$. Следовательно, наибольшее возможное значение достигается при $P = 24$; в этом случае имеем $S = 36$ и $x^2 + y^2 = 72$.

11. Переписав систему как

$$\begin{cases}(ac+bd)+(ad+bc)=13,\\(ab+cd)+(ad+bc)=24,\\(ab+cd)+(ac+bd)=25,\end{cases}$$

мы видим, что значение $ad+bc$ можно найти, сложив первые два уравнения и вычев третье. Аналогично получаем

$$\begin{cases}ab+cd=18,\\ac+bd=7,\\ad+bc=6.\end{cases}$$

Теперь можно получить верхнюю оценку на сумму квадратов:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+d^2&=(a+d-b-c)^2+2(ab+cd)+2(ac+bd)-2(ad+bc)\\&=(a+d-b-c)^2+38\geq 38\,.\end{aligned}$$

Чтобы показать, что это значение достигается, возьмем соотношение $a+d=b+c$, которое теперь, очевидно, необходимо. Вместе с третьим изначально данным уравнением оно дает $a+d=b+c=\pm 5$. Выбрав $a+d=b+c=5$ (нам достаточно найти один пример), получаем $a+b+c+d=10$. Вместе с первыми двумя уравнениями это дает $\{a+b,c+d\}=\{5\pm 2\sqrt{3}\}$ и $\{a+c,b+d\}=\{4,6\}$. Выбирая какие-то из корней, можно получить, например, $a=2-\sqrt{3}$, $b=3-\sqrt{3}$, $c=2+\sqrt{3}$, $d=3+\sqrt{3}$.

12. Так как $a_4+a_{16}=a_8+a_{12}=2a_{10}$, имеем

$$224=a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=4a_{10}\,,$$

откуда $a_{10}=56$. Искомая сумма тогда равна $19\cdot\frac{a_1+a_{19}}{2}=19\cdot a_{10}=1064$.

13. Заметим, что $NK \parallel DS$. Отсюда $\alpha \parallel DS$, что вместе с $\alpha \parallel AS$ дает $\alpha \parallel AD$. Так как $BC \parallel AD$, то расстояние от B до α равно расстоянию от любой другой точки на BC до α. Кроме того, так как $\alpha \parallel SAD$ и α делит SC в отношении $2:5$, расстояние от C до α составляет $\frac{5}{7}$ от расстояния от C до плоскости SAD.

Обозначим середины AD и BC за U и V соответственно. Рассмотрим сечение SUV пирамиды. Так как $SUV \perp SAD$ (SUV является плоскостью симметрии пирамиды и серединным перпендикуляром к AD), то расстояние от V до SAD равно расстоянию от V до SU. Таким образом, мы свели задачу к планиметрической в плоскости SUV (рис. 3).

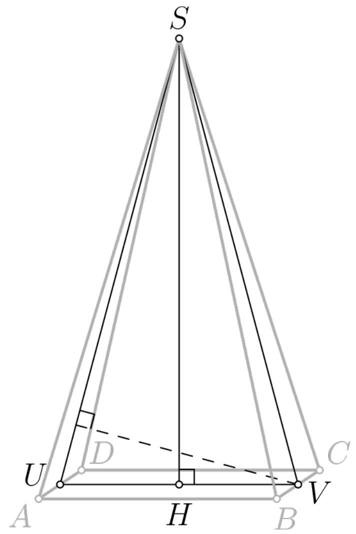

Рис. 3: к задаче 13.

Сначала найдем длины сторон треугольника SUV: $SU = \sqrt{SA^2 - AU^2} = 21\sqrt{\frac{15}{4}}$ и $UV = AB = 21$. Площадь SUV вычисляется как $\frac{1}{2} \cdot UV \cdot SH$, где H — середина UV. Находим $SH = \sqrt{SU^2 - SH^2} = 21\sqrt{\frac{14}{4}}$, откуда площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 21\sqrt{\frac{14}{4}}$. С другой стороны, эта же площадь равна $\frac{1}{2} \cdot SU \cdot x$, где x — расстояние от V до SU. Получаем

$$x = \frac{21 \cdot 21\sqrt{\frac{14}{4}}}{21\frac{15}{4}} = 21\sqrt{\frac{14}{15}} = \frac{7\sqrt{42}}{\sqrt{5}}.$$

Так как искомое расстояние равно $\frac{5}{7}x$, приходим к ответу $(\frac{5}{7}x)^2 = 210$.

14. Заменим $t = x/y$; имеем $a = 1 + t$ и $b = 1 + t^{-1}$. Сначала раскроем $a^3 + b^3$:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (1+t)^3 + (1+t^{-1})^3 \\ &= t^3 + 3t^2 + 3t + 2 + 3t^{-1} + 3t^{-2} + t^{-3}. \end{aligned}$$

Выделяя степени $t + t^{-1}$, получаем

$$(t + t^{-1})^3 + 3(t + t^{-1})^2 - 4 = 50.$$

Заменяя $s = t + t^{-1}$, получаем $s^3 + 3s^2 - 54 = 0$. Можно перебрать целые корни этого уравнения и найти $s = 3$; после выделения соответствующего множителя получается $(s-3)(s^2 + 6s + 18) = 0$. Второй сомножитель всегда положителен, поэтому $s = 3$ — единственный корень.

Чтобы найти искомое значение, аналогично раскрываем $a^4 + b^4$ и выделяем степени s:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (1+t)^4 + (1+t^{-1})^4 \\ &= t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 2 + 4t^{-1} + 6t^{-2} + 4t^{-3} + t^{-4} \\ &= s^4 + 4s^3 + 2s^2 - 8s - 8 \\ &= 81 + 108 + 18 - 24 - 8 = 175. \end{aligned}$$

15. Обозначим гипотенузу упомянутого в условии треугольника за c, а его катеты за a и b. По теореме Виета имеем $a + b = 14 - c$ и $ab = 84/c$. Отсюда $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (14-c)^2 - 2 \cdot 84/c$. Мы получили уравнение на c:

$$\begin{gathered} c^2 = 14^2 - 28c + c^2 - \frac{168}{c}, \\ 28c - 196 + \frac{168}{c} = 0, \\ 28c^2 - 196c + 168 = 0, \\ c^2 - 7c + 6 = 0, \\ (c-1)(c-6) = 0. \end{gathered}$$

Так как $c = 1$ невозможно (c — наибольшая сторона треугольника, что означает $14 = a + b + c \leq 3c$), остается $c = 6$. Теперь по Виету $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2B = 14^2 - 2B$ с одной стороны, а по Пифагору $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 = 72$ с другой, откуда $B = 62$.

Осталось проверить, что такой треугольник существует, то есть другие две стороны действительно можно найти из $a + b = 8$ и $ab = 14$. Получаем $\{a, b\} = \{4 \pm \sqrt{2}\}$.

16. Если ребра увеличили в два раза, то объем увеличился в 8 раз, то есть на 700%.

17. Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, чтобы установить оценку сверху:

$$x^2 y = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y \leq 4 \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y}{3} \right)^3 = 4 \cdot 4^3 = 256.$$

Это значение принимается при $x = 8$ и $y = 4$.

18. Множество A может содержать x элементов из $\{1, 3, \ldots, 37\}$ и y элементов из $\{2, 4, \ldots, 36\}$ тогда и только тогда, когда $1 \leq x + y \leq 4$ и x нечетно; при фиксированных x и y есть $\binom{19}{x}\binom{18}{y}$ способов выбрать такое A. Суммируя по всем допустимым парам x и y, получаем
$$\binom{19}{1} + \binom{19}{1}\binom{18}{1} + \binom{19}{1}\binom{18}{2} + \binom{19}{1}\binom{18}{3} + \binom{19}{3} + \binom{19}{3}\binom{18}{1} = 37183$$

19. Домножая на $12ab$, получаем
$$12b + 12a = ab\,,$$
$$144 = ab - 12a - 12b + 144\,,$$
$$144 = (a-12)(b-12)\,.$$
Если $a \leq 12$, то $1/a + 1/b > 1/a \geq 1/12$, чего не может быть. Поэтому $a-12$ и $b-12$ — это натуральные числа, и $a - 12 < b - 12$.

Так как $(a-12)^2 < (a-12)(b-12) = 144 = 12^2$, то $a-12 < 12$. Натуральные делители числа 144, не превосходящие 12 — это 1, 2, 3, 4, 6, 8 и 9. Это дает семь возможных значений $a - 12$; соответствующие b можно найти с помощью $b - 12 = 144/(a-12)$.

20. Если считать все 10 букв разными, то их можно переставить $10!$ способами. Каждое слово при этом получается $3! \cdot 2! \cdot 2!$ перестановками, которые по-разному действуют на 3 буквы А, 2 буквы М и 2 буквы Т. Поэтому количество слов равно
$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$$