

4-я Олимпиада Мегаполисов

Математика

Условия

День 1

Задача 1. Даны простые числа p , q , r и целое положительное n такие, что величины

$$\frac{p+n}{qr}, \frac{q+n}{rp}, \frac{r+n}{pq}$$

являются целыми числами. Докажите, что $p = q = r$. (*Nazar Agakhanov*)

Задача 2. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор *подписчиков* среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m . Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели. (*Vladislav Novikov*)

Задача 3. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой IO . Прямая ℓ , симметричная прямой BC относительно s , пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO . (*Dušan Djukić*)