4-я Олимпиада Мегаполисов
Математика

Условия

День 2

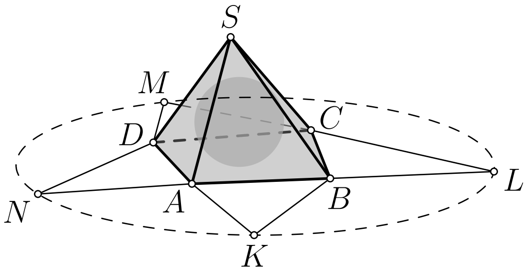
Задача 4. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку «сдал» к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»?

(Denis Afrizonov)

Задача 5. Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причём существует сфера, вписанная в эту пирамиду (то есть расположенная внутри пирамиды и касающаяся всех её граней). Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$, как показано на рисунке. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.



(Tibor Bakos and Géza Kós)

Задача 6. Пусть p — простое число, а $f(x)$ — многочлен степени d с целыми коэффициентами такой, что числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(p)$ дают ровно k различных остатков при делении на p, причём $1 < k < p$. Докажите, что

$$\frac{p-1}{d} \leqslant k-1 \leqslant (p-1)\left(1-\frac{1}{d}\right).$$

(Dániel Domán, Gyula Károlyi and Emil Kiss)