4-я Олимпиада Мегаполисов
Математика

Решения

День 1

Задача 1. Даны простые числа p, q, r и целое положительное n такие, что величины

$$\frac{p+n}{qr},\ \frac{q+n}{rp},\ \frac{r+n}{pq}$$

являются целыми числами. Докажите, что $p=q=r$. *(Nazar Agakhanov)*

Решение. Без ограничения общности, мы можем считать $p \geqslant q \geqslant r$.

Так как $p \mid q+n$ и $p \mid r+n$, то $p \mid q-r$, но $0 \leqslant q-r < q \leqslant p$, откуда следует $q=r$. Кроме того, из условий $q \mid p+n$ и $q \mid r+n$ следует, что $q \mid p-r=p-q$, поэтому $q \mid p$, что возможно лишь в случае $p=q=r$. $\square$

Задача 2. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор *подписчиков* среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели. *(Vladislav Novikov)*

Решение. Пусть n — количество человек в социальной сети. Будем следить только за остатками рейтингов от деления на m. Цель хакера — сделать все n остатков равными 0.

Если бы хакеру разрешалось менять рейтинг более одного раза в день, то он смог бы достичь своей цели уже в первый день. Действительно, он мог бы сначала прибавить несколько раз рейтинг первому пользователю так, чтобы он стал равен 0 по модулю m, далее аналогично второму и т. д. В остальные дни хакер может не делать ничего, и рейтинги всех пользователей, начиная со второго дня, будут равны нулю. Назовём это *изначальной стратегией.*

Докажем теперь, что хакер может сделать те же самые изменения рейтингов, но в разные дни, чтобы через некоторое время рейтинги всех пользователей стали равны 0.

Будем представлять состояния социальной сети с помощью векторов, состоящих из n остатков по модулю m (соответствующих рейтингам пользователей). Такие вектора можно *складывать* по модулю m. Например, если $m = 4$ и $n = 6$, то

$$(1, 2, 3, 0, 2, 1) + (2, 3, 3, 0, 2, 3) = (3, 1, 2, 0, 0, 0)\,.$$

Если прямо перед полуночью был вектор X, обозначим за $f(X)$ вектор состояний после полуночи.

Лемма.

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y)\,.$$

Доказательство леммы. Нужно показать, что вектора $f(X+Y)$ и $f(X)+f(Y)$ совпадают на каждой позиции, т. е. для каждого пользователя. Рассмотрим произвольного пользователя, пусть его зовут Боб. Пусть в расстановке X у Боба остаток рейтинга b_x, а у его подписчиков суммарно s_x (сумма берётся по модулю m). Пусть в расстановке Y у Боба рейтинг b_y, у его подписчиков суммарно s_y.

Тогда у Боба в $f(X)$ будет $b_x + s_x$, в $f(Y)$ будет $b_y + s_y$, а в $f(X + Y)$ будет $b_x + b_y + s_x + s_y$. *Лемма доказана.*

Давайте поймём, как одно действие хакера влияет на вектор в будущем. Пусть в какой-то день был вектор X, тогда, если бы хакер не вносил никаких изменений, мы получили бы последовательность векторов

$$X,\ f(X),\ f(f(X)),\ \ldots,\ f^k(X),\ \ldots$$

где f^k обозначает k раз применённое преобразование f.

Если в первый день хакер увеличит у Боба рейтинг на 1, а больше изменений вносить не будет, то мы получим последовательность

$$X + b,\ f(X + e_b) = f(X) + f(e_b),\ \ldots,\ f^k(X) + f^k(e_b),\ \ldots,$$

где в векторе $e_b = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ единичка стоит на месте, соответствующем Бобу. Таким образом, через k дней разница будет $f^k(e_b)$. Аналогично показывается следующее: пусть есть вектор X, и две стратегии хакера, которые отличаются только прибавлением e_b в один из дней. Тогда через k дней результаты этих стратегий будут отличаться на $f^k(e_b)$.

Каждый вектор в последовательности $(f^k(e_b))$ определяется по предыдущему, а всего различных векторов не более чем m^n. Поэтому последовательность $(f^k(e_b))$ периодична, возможно, с предпериодом. Пусть T_b — длина периода.

Заметим, что если поменять стратегию хакера, заменив прибавление e_b в один из дней на прибавление e_b ровно через T_b дней, то результаты этих стратегий рано или поздно (не позднее чем через m^n дней) перестанут отличаться.

Теперь будем последовательно переносить все изменения рейтингов из первого дня в другие дни так, чтобы действия хакера совершались в разные дни. Это можно сделать, так как для каждого действия можно прибавлять соответствующий период сколько угодно раз.

Таким образом, мы получим стратегию для хакера, результат которой через некоторое время (не более, чем через m^n дней после последнего изменения) не отличается от изначальной стратегии с изменениями всех рейтингов в первый день. Результатом изначальной стратегии в этот момент времени будет вектор из всех нулей. Таким образом, результатом нашей новой стратегии с не более чем одним изменением в день тоже будет нулевой вектор. $\square$

Задача 3. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой IO. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO. *(Dušan Djukić)*

Решение 1. Пусть вписанная окружность ω касается прямых BC, CA, AB и KL в точках D, E, F и G соответственно. Обозначим центр описанной окружности треугольника AKL через U.

Так как $DG \parallel IO$ и $\angle KIG = \angle KFG = \angle FDG = \angle FDI + \angle IDG = \angle KBI + \angle OIG$ (равенство ориентированных углов), мы имеем $\angle KIO = \angle KBI$. Из этого следует, что описанная окружность треугольника BIK касается прямой IO. Аналогично, описанная окружность треугольника CIL касается прямой IO.

Рассмотрим инверсию относительно окружности ω (рис. 1). При этой инверсии точки A, B, C, K и L переходят в середины A', B', C', K' и L' отрезков EF, FD, DE, FG и EG соответственно. Образами описанных окружностей треугольников BIK и CIL служат прямые $B'K'$ и $C'L'$, а значит, эти прямые параллельны IO. Описанные окружности треугольников ABC и AKL переходят в описанные окружности треугольников $A'B'C'$ и $A'K'L'$, центры которых обозначим через O_1 и U_1 соответственно. Ясно, что $O_1 \in IO$, $U_1 \in IU$.

Так как $B'C'L'K'$ — параллелограмм и $\angle L'A'K' = \angle FGE = 180^\circ - \angle EDF = 180^\circ - \angle B'A'C'$, параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{B'K'} = \overrightarrow{C'L'}$ переводит описанную окружность треугольника $A'B'C'$ в описанную окружность треугольника $A'K'L'$, и тогда прямая O_1U_1 параллельна прямой IO. Следовательно, U_1 лежит на прямой IO, и точка U — тоже. $\square$

Решение 2. Пусть вписанная окружность ω касается прямых BC, AC, AB и KL

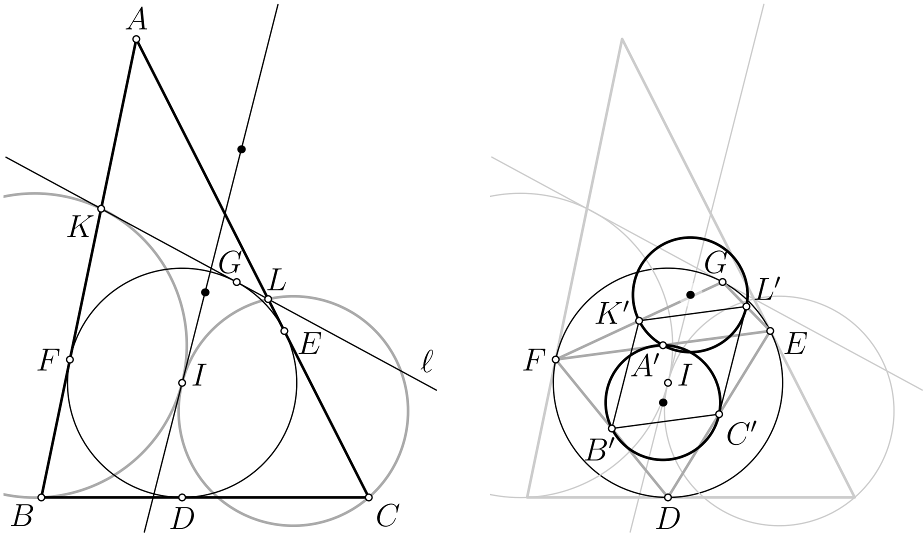

Рис. 1: к решению задачи 3

в точках D, E, F и G соответственно. Заметим, что $GD \perp s$, откуда $GD \parallel IO$. Обозначим центр описанной окружности треугольника $\triangle AKL$ через U. Мы будем использовать следующий известный факт:

Лемма. Прямая IO служит прямой Эйлера для треугольника DEF.

Доказательство леммы. Рассмотрим инверсию относительно вписанной окружности ω. Точки A, B, C по действием этой инверсии перейдут в середины отрезков EF, FD и DE, а значит, описанная окружность треугольника ABC перейдёт в окружность девяти точек треугольника DEF. Следовательно, центр окружности девяти точек треугольника DEF лежит на прямой IO, то есть точка O лежит на прямой Эйлера треугольника DEF. *Лемма доказана.*

Согласно лемме, точка M пересечения медиан треугольника DEF лежит на прямой IO. Аналогично, точка N пересечения медиан треугольника GEF лежит на прямой IU. Однако, $MN \parallel DG \parallel IO$, откуда следует, что точка U лежит на прямой IO. $\square$

Решение 3. Обозначим через $\delta(X, \overrightarrow{a})$ ориентированное расстояние от точки X до прямой $\overrightarrow{a}$.

Лемма. Точка X плоскости лежит на прямой s тогда и только тогда, когда

$$f(X) = \delta(X, \overrightarrow{BC}) + \delta(X, \overrightarrow{CA}) + \delta(X, \overrightarrow{AB}) = 3r,$$

где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Доказательство леммы. Ориентированное расстояние от точки до фиксированной прямой — линейная функция. Следовательно, $f(X)$ — также линейная функция (неконстантная, так как треугольник ABC неравносторонний), а значит, геометрическим местом точек X плоскости, удовлетворяющим соотношению $f(X) = 3r$, служит некоторая прямая s'. Так как $f(I) = 3r$, имеем $I \in s'$.

Заметим, что если ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c — серединные перпендикуляры к отрезкам BC, CA и AB, направленные внутрь треугольника, то тогда $\delta(I, \ell_a) + \delta(I, \ell_b) + \delta(I, \ell_c) = \sum_{cyc}(p - c - \frac{a}{2}) = 0$. Повернув на $90°$, делаем вывод, что $f(X)$ остаётся постоянной при движении точки X по любой прямой, перпендикуряной IO (в том числе по прямой s). *Лемма доказана.*

Обозначим центр описанной окружности треугольника AKL через U. Рассмотрев треугольник AKL с вневписанной окружностью ω, мы аналогично получаем

Следствие. Точка X плоскости лежит на прямой s_1, проходящей через I и перпендикулярной IU, тогда и только тогда, когда

$$f_1(X) = -\delta(X, \overrightarrow{KL}) + \delta(X, \overrightarrow{LA}) + \delta(X, \overrightarrow{AK}) = 3r\,.$$

Если $s \parallel BC$, то треугольник ABC равнобедренный и утверждение задачи очевидно из симметрии. Предположим, что прямые s, KL и BC пересекаются в точке X_0. Согласно лемме, $f(X_0) = 3r$, а значит, $f_1(X_0) = 3r$, откуда выводим $X_0 \in s_1$. Следовательно, прямые s и s_1 совпадают, т. е. точка U лежит на прямой IO. □