

## Задача 1: «Космология Ньютона–Лапласа»

После открытия Исааком Ньютоном закона всемирного тяготения Пьер-Симон Лаплас предпринял попытку описать поведение Вселенной, считая ее облаком движущейся материи. Лаплас использовал для описания движения этого облака предположение о том, что при больших расстояниях между телами из всех взаимодействий между ними существенную роль играет только гравитация. Однако для построения реалистичной модели ему не хватало экспериментальных данных.

Только в XX веке астрономические наблюдения позволили установить, что вещество в наблюдаемой части Вселенной распределено практически однородно и изотропно (то есть средняя плотность вещества в областях, вмещающих в себя много галактик, практически одинакова). Кроме того, Эдвин Хаббл открыл закон, согласно которому далекие объекты удаляются от нас (вдоль луча зрения) со скоростями  $V_r$ , пропорциональными расстоянию  $r$  до них:  $V_r = H \cdot r$  (величина  $H$ , не зависящая от радиуса, получила название *постоянной Хаббла*; в настоящее время она примерно равна  $H_t \approx 7 \cdot 10^{-11}$  лет<sup>-1</sup>). Георгий (Джордж) Гамов предположил, что такое распределение скоростей возникло благодаря Большому Взрыву (Big Bang): этот взрыв произошел в малой по размерам области, и после него вещество полетело в разные стороны с различными скоростями. Поэтому частицы, полетевшие быстрее, к нынешнему времени улетели дальше от области взрыва.

1. Означает ли закон Хаббла, что Солнечная система находится в той области Вселенной, в которой произошел Большой Взрыв? (Ведь Хаббл вел свои наблюдения с Земли!) Подчеркните правильный ответ и поясните его чертежом и формулой.

В теоретической физике для описания расширения Вселенной после Большого Взрыва используют уравнения общей теории относительности Эйнштейна. Любопытно, однако, к каким выводам должен был прийти Лаплас, если бы в своей модели, базирующейся на уравнениях механики Ньютона, он использовал бы информацию об однородности Вселенной и закон Хаббла? Для ответа на этот вопрос рассмотрим расширение так называемой «Ньютоновской Вселенной» (НВ). НВ – это однородный шар с полной массой  $M = 10^{55}$  кг, взаимодействие частиц вещества в котором описывается законом всемирного тяготения Ньютона с гравитационной постоянной  $G \approx 6,7 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/(кг·с<sup>2</sup>), а распределение скоростей вещества описывается законом Хаббла, в котором «постоянная»  $H = H(t)$  есть функция времени.

2. Вычислите собственную гравитационную потенциальную энергию  $E_g$  НВ в тот момент времени  $t$ , когда ее радиус равен  $R$  (ответ дайте в виде формулы, выразив  $E_g$  через  $M$  и  $R$ ).
3. Вычислите кинетическую энергию  $E_K$  НВ в этот же момент времени (ответ дайте в виде формулы, выразив  $E_K$  через  $M$ ,  $H$  и  $R$ ).

Ясно, что в процессе дальнейшего расширения (с течением времени  $t$ ) материя в НВ будет тормозиться силами тяготения. Допустим, что некие «жители» НВ в момент времени  $t$ , которое отсчитывается от Большого Взрыва, измерили среднюю плотность вещества в ней  $\rho(t)$  и величину постоянной Хаббла  $H(t)$ .

4. При каком соотношении между  $\rho(t)$  и  $H(t)$  расширение НВ за конечное время прекратится и сменится сжатием? (Ответ дайте в виде неравенства.)
5. Пусть полная энергия вещества НВ (сумма кинетической энергии и потенциальной энергии гравитационного взаимодействия) равна  $E = -\frac{2}{15} M c^2$  (где  $c$  – скорость света в вакууме).

Найдите максимальный радиус, который может приобрести НВ в процессе расширения. Запишите формулу и получите численный ответ в парсеках (1 парсек  $\approx 3,2$  световых года  $\approx 3 \cdot 10^{16}$  м).

6. Для того же случая (который описан в пункте 5) найдите полное время жизни НВ от Большого Взрыва до Большого Схлопывания. Запишите формулу и получите численный ответ в годах.

**Математическая подсказка:**  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = (y = \sqrt{1-x}) = 2 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy.$

7. Каковы могут быть варианты дальнейшего движения вещества в шаре при разных соотношениях между плотностью и постоянной Хаббла? Опишите качественно поведение радиуса НВ для каждого из возможных случаев. Для этого изобразите на рисунках 1a–1b, 2a–2b и 3a–3b три разные пары графиков – зависимости радиуса  $R$  НВ и скорости ее расширения  $V_R = \frac{dR}{dt}$  от времени (напомним, что «в момент Большого Взрыва» – при  $t = 0$  – радиус НВ считается «практически нулевым»). Графики изобразите качественно, показав на них все важные детали и особенности.

Пусть результаты измерений обнаружили, что изучаемая нами НВ в энергетическом смысле возникла «из ничего», то есть что полная энергия вещества в ней равна нулю.

8. Найдите закон расширения  $R(t)$  такой НВ. В ответе приведите формулу.  
9. Как в этом случае будут изменяться плотность вещества и постоянная Хаббла с течением времени? Запишите формулы для  $\rho(t)$  и  $H(t)$ .

Предположим, что НВ с нулевой энергией расширяется адиабатически и обратимо. Пусть также связь ее энтропии с объемом и температурой приближенно описывается формулой идеального газа, то есть  $S(V, T) \approx \text{const} \cdot M \cdot \ln \left( \frac{VT^{3/2}}{V_0 T_0^{3/2}} \right)$ . В тот момент времени, когда постоянная Хаббла в НВ равна современному значению  $H_t \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ лет}^{-1}$  в нашей Вселенной, ее температура равна  $T_t \approx 2,7\text{K}$ .

10. Найдите температуру НВ  $T_0$  спустя время  $t_0 = 1$  с после Большого Взрыва. В ответе укажите численное значение.