Задача 3: «Монополи и дионы»

Еще Шарль Кулон в XVIII веке экспериментально установил, что законы взаимодействия электрических зарядов и полюсов магнитов одинаковы. После этого многие исследователи пытались разделить два полюса магнита и получить «одиночный» *магнитный заряд*, который назвали «*магнитным монополем*». Однако все известные нам магниты – от макроскопических тел до элементарных частиц микромира – оказываются *магнитными диполями*, то есть имеют оба магнитных полюса. Андре-Мари Ампер в XIX веке показал, что поле магнитного диполя создается малым контуром с электрическим током – таким образом, для описания наблюдаемых явлений нет необходимости использовать предположение о существовании магнитных зарядов. В XX веке Поль Дирак придумал, как изготовить «искусственный» магнитный монополь: нужно взять очень тонкий и очень длинный (длина l, сечении S, причем $l \gg \sqrt{S}$) гибкий соленоид из N витков, по обмотке которого течет постоянный ток I. Магнитный поток будет течь внутри соленоида, и вытекать через его торец, радиально расходясь в разные стороны. Поэтому магнитное поле вблизи торца (всюду, исключая точки самого соленоида) будет очень похоже на поле магнитного монополя с магнитным зарядом $M = \frac{NIS}{l}$. Индукция этого поля будет равна $\vec{B} \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\vec{r}$, где $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7}$Гн/м – магнитная постоянная. Позже эта идея была реализована на практике – в качестве гибкого соленоида использовался вихрь в квантовой жидкости или квантовом газе. «Торцы» такого соленоида находятся далеко друг от друга и движутся почти независимо, так что создается «иллюзия» присутствия в системе двух монополей. Линии индукции магнитного поля монополя выходят из него в радиальных направлениях и расходятся сферически симметрично – аналогично тому, как идут линии напряженности электрического поля точечного положительного электрического заряда.

В 1974 году Александр Поляков и Герард ′т Хоофт обнаружили, что «настоящие» магнитные монополи – очень тяжелые элементарные частицы с ненулевым магнитным зарядом – должны существовать согласно предсказаниям, которые следуют из многих реалистичных теорий физики элементарных частиц. Поэтому и в XXI веке активно продолжаются экспериментальные поиски таких частиц.

Часть I: регистрация пролета магнитного монополя.

Один из способов зарегистрировать магнитный монополь – зафиксировать индукционный ток при пролете монополя сквозь проводящий контур. В настоящее время в детекторах монополей используются сверхпроводящие контуры (такие установки называют SQUID – Superconduction Quantum Interference Device).

1.1. Магнитный монополь движется вдоль оси тонкого *сверхпроводящего* кольца с достаточно большой скоростью и пролетает через это кольцо. Изобразите на рисунке 1 график зависимости силы индукционного тока I в этом кольце от времени t. Положительным направлением тока считайте направление его течения при приближении монополя к кольцу. Считайте, что при $t = 0$ монополь находится в плоскости симметрии кольца. График изобразите качественно, показав на нем все важные детали и особенности.

Пусть магнитный заряд монополя равен $M = (4 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл} \cdot \text{Гн} \cdot \text{с}^{-1})/\mu_0$, его масса $m = 1$ мкг, радиус кольца равен $a = 1$ м, а радиус проволоки, из которой оно изготовлено $r = 0{,}5$ мм. Индуктивность такого кольца с хорошей точностью определяется приближенной (аппроксимационной) формулой Гровера: $L \approx \mu_0 a \left[\ln\left(\frac{8a}{r}\right) - \frac{7}{4}\right]$.

1.2. Пусть на очень большом расстоянии от кольца ($x_0 \gg a$) скорость монополя $v_0 = 1$ км/с. В некоторый момент времени монополь находится на расстоянии x от центра кольца. Система находится в вакууме, монополь движется вдоль оси кольца. Чему равна величина индукционного тока в кольце $I(x)$ в этот момент времени? Чему равняется максимальная величина индукционного тока I^S_{max}? Пренебрегая излучением электромагнитных волн, найдите максимальное изменение скорости монополя ($v_0 - v_{min}$) во время движения. В ответе приведите формулу для I, формулу и численный ответ для I_{max}^S (в мА), формулу и численный ответ для изменения скорости (в м/с).

Математическая подсказка: Телесный угол, охватываемый конусом с углом полураствора α, равен $\Omega = 2\pi \cdot [1 - \cos\alpha]$.

Далее Вам необходимо исследовать, как повлияет на импульс индукционного тока и движение монополя наличие у кольца электрического сопротивления.

1.3. Пусть магнитный монополь движется с достаточно большой скоростью вдоль оси тонкого *проводящего* кольца и пролетает через это кольцо.

А) Изобразите на рисунке 2 график зависимости силы индукционного тока I в этом кольце от времени t. Сопротивление кольца велико: $R \gg \frac{Lv_0}{2r}$.

В) На рисунке 3 изобразите график зависимости $I(t)$ для аналогичного движения монополя, но в случае «средней» величины сопротивления кольца: $\frac{Lv_0}{a} \ll R \ll \frac{Lv_0}{2r}$.

С) На рисунке 4 для сравнения изобразите график зависимости $I(t)$ для случая кольца с большим сопротивлением при пролете через него тонкого линейного цилиндрического магнита, также движущегося вдоль оси кольца (магнитная ось магнита совпадает с осью кольца).

Во всех случаях положительным направлением тока считайте направление его течения при приближении объекта к кольцу. Считайте, что при $t = 0$ монополь (середина цилиндрического магнита) находится в плоскости симметрии кольца. Графики изобразите качественно, показав на них все важные детали и особенности.

Рассмотрим ситуацию аналогичную описанной в пункте 1.2, только с кольцом, у которого удельное сопротивление материала $\rho = 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м (численные значения a, r, M, m, v_0 остались прежними).

1.4. В некоторый момент времени монополь находится на расстоянии $x \gg r$ от центра кольца и движется со скоростью $v(x)$. Чему равна величина индукционного тока в кольце $I(x)$ в этот момент времени? Пренебрегая излучением электромагнитных волн, оцените изменение скорости монополя после пролета через кольцо (то есть после удаления от кольца на очень большое расстояние). В ответе приведите формулу для I и численный ответ для изменения скорости в м/с.

Часть II: дион и круговые орбиты.

Многие теории физики элементарных частиц, помимо магнитных монополей, предсказывают существование частиц, имеющих и электрический, и магнитный заряд (такие гипотетические частицы называют *дионами*).

Пусть в поле очень тяжелого диона с электрическим зарядом $Q > 0$ и магнитным зарядом $M > 0$ движется легкая заряженная частица с массой m и электрическим зарядом q. Напомним, что электрическая постоянная в законе Кулона ε_0 связана с магнитной постоянной соотношением $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

2.1. Частицу запустили таким образом, что она движется в поле диона по круговой орбите с постоянной по модулю скоростью $v \ll c$ (излучение электромагнитных волн при такой скорости пренебрежимо мало). На каких расстояниях от диона могут находиться точки этой орбиты? Ответ дайте в виде формулы. Нарисуйте дион, частицу и ее орбиту.

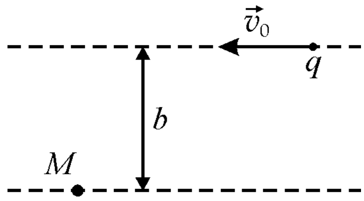
2.2. Укажите положение орбиты частицы относительно диона (найдите все необходимые для этого геометрические характеристики и выразите их в виде формул). Обозначьте эти характеристики на рисунке, который Вы изобразили, отвечая на вопрос из предыдущего пункта.

2.3. Укажите две физические величины (одну – скалярную, другую – векторную), сохраняющиеся при движении заряженной частицы в поле диона. Выразите эти величины через координату $\vec{r}$ и скорость частицы $\vec{v}$ (в эти формулы также должны войти параметры системы). Получите формулы для указанных Вами величины в случае движения по исследованной круговой орбите (ответ дайте в виде формул, в которые входят параметры системы и v).

Указание. Найденная Вами векторная величина при $M = 0$ должна переходить в момент импульса частицы, который очевидно сохраняется при движении в поле неподвижного точечного электрического заряда. При $M \neq 0$ она будет равна величине полного момента импульса системы, состоящей из диона, частицы и их общего электромагнитного поля.

Математическая подсказка. Для ответа на поставленный вопрос может оказаться полезным следующее тождество: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)}{r^2} = -\frac{(\vec{v}\vec{r})}{r^3}$.

Часть III: магнитный монополь и квантование электрических зарядов.



Рассмотрим движение заряженной частицы массой m и электрическим зарядом q в поле закрепленного монополя с магнитным зарядом M. Пусть частица летит мимо монополя, начиная движение с очень большого расстояния со скоростью v_0 таким образом, что *прицельный параметр* равен b (это величина расстояния от монополя до линии движения частицы на очень большом расстоянии – см. рисунок). Оказалось, что значение b таково, что после пролета мимо монополя и удаления на очень большое расстояние частица движется в плоскости, параллельной плоскости рисунка, находящейся на расстоянии d от нее.

3.1. Какова будет величина скорости частицы v' после рассеяния на монополе (то есть после удаления на очень большое расстояние от него)? Ответ дайте в виде формулы, в которую входят заданные выше величины.

3.2. Найдите возможные значения угла рассеяния частицы (это угол между $\vec{v}'$ и $\vec{v}_0$). Ответ дайте в виде формулы, в которую входят заданные выше величины.

3.3. Чему будет равно расстояние от монополя до линии движения частицы после рассеяния b'? Ответ дайте в виде формулы, в которую входят заданные выше величины.

В рамках классической теории магнитные и электрические заряды могут принимать произвольные значения, однако с точки зрения *квантовой теории* это не так. Дело в том, что в квантовой теории и момент количества движения частицы, связанный с ее движением (его называют *орбитальным моментом*), и момент количества движения электромагнитного поля подчиняются условию квантования момента импульса: его проекция на любое выделенное направление должна быть кратна величине $\frac{\hbar}{2} \equiv \frac{h}{4\pi}$, где фундаментальная постоянная $h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

3.4. Рассмотрите движение заряженной частицы с электрическим зарядом q в поле магнитного заряда M, используя условие квантование момента импульса. Получите условие, связывающее значения q и M, при которых законы сохранения в этой задаче и квантование момента импульса не противоречат друг другу. Вычислите величину такого магнитного заряда, существование которого приведет к тому, что электрические заряды всех частиц должны будут быть кратны элементарному заряду $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В ответе запишите формулу для связи магнитных и электрических зарядов и численное значение нужной величины M в Кл·м/с.