Задача 3: «Монополи и дионы».

Еще Шарль Кулон в XVIII веке экспериментально установил, что законы взаимодействия электрических зарядов и полюсов магнитов одинаковы. После этого многие исследователи пытались разделить два полюса магнита и получить «одиночный» *магнитный заряд*, который назвали «*магнитным монополем*». Однако все известные нам магниты – от макроскопических тел до элементарных частиц микромира – оказываются *магнитными диполями*, то есть имеют оба магнитных полюса. Андре-Мари Ампер в XIX веке показал, что поле магнитного диполя создается малым контуром с электрическим током – таким образом, для описания наблюдаемых явлений нет необходимости использовать предположение о существовании магнитных зарядов. В XX веке Поль Дирак придумал, как изготовить «искусственный» магнитный монополь: нужно взять очень тонкий и очень длинный (длина l, сечении S, причем $l \gg \sqrt{S}$) гибкий соленоид из N витков, по обмотке которого течет постоянный ток I. Магнитный поток будет течь внутри соленоида, и вытекать через его торец, радиально расходясь в разные стороны. Поэтому магнитное поле вблизи торца (всюду, исключая точки самого соленоида) будет очень похоже на поле магнитного монополя с магнитным зарядом $M = \frac{NIS}{l}$. Индукция этого поля будет равна $\vec{B} \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\vec{r}$, где $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7}$Гн/м – магнитная постоянная. Позже эта идея была реализована на практике – в качестве гибкого соленоида использовался вихрь в квантовой жидкости или квантовом газе. «Торцы» такого соленоида находятся далеко друг от друга и движутся почти независимо, так что создается «иллюзия» присутствия в системе двух монополей. Линии индукции магнитного поля монополя выходят из него в радиальных направлениях и расходятся сферически симметрично – аналогично тому, как идут линии напряженности электрического поля точечного положительного электрического заряда.

В 1974 году Александр Поляков и Герард ′т Хоофт обнаружили, что «настоящие» магнитные монополи – очень тяжелые элементарные частицы с ненулевым магнитным зарядом – должны существовать согласно предсказаниям, которые следуют из многих реалистичных теорий физики элементарных частиц. Поэтому и в XXI веке активно продолжаются экспериментальные поиски таких частиц.

Часть I: регистрация пролета магнитного монополя.

Один из способов зарегистрировать магнитный монополь – зафиксировать индукционный ток при пролете монополя сквозь проводящий контур. В настоящее время в детекторах монополей используются сверхпроводящие контуры (такие установки называют SQUID – Superconduction Quantum Interference Device).

1.1. Магнитный монополь движется вдоль оси тонкого *сверхпроводящего* кольца с достаточно большой скоростью и пролетает через это кольцо. Изобразите на рисунке 1 график зависимости силы индукционного тока I в этом кольце от времени t. Положительным направлением тока считайте направление его течения при приближении монополя к кольцу. Считайте, что при $t = 0$ монополь находится в плоскости симметрии кольца. График изобразите качественно, показав на нем все важные детали и особенности.

Пусть магнитный заряд монополя равен $M = (4 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл} \cdot \text{Гн} \cdot \text{с}^{-1})/\mu_0$, его масса $m = 1$ мкг, радиус кольца равен $a = 1$ м, а радиус проволоки, из которой оно изготовлено $r = 0{,}5$ мм. Индуктивность такого кольца с хорошей точностью определяется приближенной (аппроксимационной) формулой Гровера: $L \approx \mu_0 a \left[\ln\left(\frac{8a}{r}\right) - \frac{7}{4}\right]$.

1.2. Пусть на очень большом расстоянии от кольца ($x_0 \gg a$) скорость монополя $v_0 = 1$ км/с. В некоторый момент времени монополь находится на расстоянии x от центра кольца. Система находится в вакууме, монополь движется вдоль оси кольца. Чему равна величина индукционного тока в кольце $I(x)$ в этот момент времени? Чему равняется максимальная величина индукционного тока I^S_{max}? Пренебрегая излучением электромагнитных волн, найдите максимальное изменение скорости монополя ($v_0 - v_{min}$) во время движения. В ответе приведите формулу для I, формулу и численный ответ для I_{max}^S (в мА), формулу и численный ответ для изменения скорости (в м/с).

Математическая подсказка: Телесный угол, охватываемый конусом с углом полураствора α, равен $\Omega = 2\pi \cdot [1 - \cos\alpha]$.

Далее Вам необходимо исследовать, как повлияет на импульс индукционного тока и движение монополя наличие у кольца электрического сопротивления.

1.3. Пусть магнитный монополь движется с достаточно большой скоростью вдоль оси тонкого *проводящего* кольца и пролетает через это кольцо.

А) Изобразите на рисунке 2 график зависимости силы индукционного тока I в этом кольце от времени t. Сопротивление кольца велико: $R \gg \frac{Lv_0}{2r}$.

В) На рисунке 3 изобразите график зависимости $I(t)$ для аналогичного движения монополя, но в случае «средней» величины сопротивления кольца: $\frac{Lv_0}{a} \ll R \ll \frac{Lv_0}{2r}$.

С) На рисунке 4 для сравнения изобразите график зависимости $I(t)$ для случая кольца с большим сопротивлением при пролете через него тонкого линейного цилиндрического магнита, также движущегося вдоль оси кольца (магнитная ось магнита совпадает с осью кольца).

Во всех случаях положительным направлением тока считайте направление его течения при приближении объекта к кольцу. Считайте, что при $t = 0$ монополь (середина цилиндрического магнита) находится в плоскости симметрии кольца. Графики изобразите качественно, показав на них все важные детали и особенности.

Рассмотрим ситуацию аналогичную описанной в пункте 1.2, только с кольцом, у которого удельное сопротивление материала $\rho = 10^{-8}$ Ом · м (численные значения a, r, M, m, v_0 остались прежними).

1.4. В некоторый момент времени монополь находится на расстоянии $x \gg r$ от центра кольца и движется со скоростью $v(x)$. Чему равна величина индукционного тока в кольце $I(x)$ в этот момент времени? Пренебрегая излучением электромагнитных волн, оцените изменение скорости монополя после пролета через кольцо (то есть после удаления от кольца на очень большое расстояние). В ответе приведите формулу для I и численный ответ для изменения скорости в м/с.

Часть II: дион и круговые орбиты.

Многие теории физики элементарных частиц, помимо магнитных монополей, предсказывают существование частиц, имеющих и электрический, и магнитный заряд (такие гипотетические частицы называют *дионами*).

Пусть в поле очень тяжелого диона с электрическим зарядом $Q > 0$ и магнитным зарядом $M > 0$ движется легкая заряженная частица с массой m и электрическим зарядом q. Напомним, что электрическая постоянная в законе Кулона ε_0 связана с магнитной постоянной соотношением $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

2.1. Частицу запустили таким образом, что она движется в поле диона по круговой орбите с постоянной по модулю скоростью $v \ll c$ (излучение электромагнитных волн при такой скорости пренебрежимо мало). На каких расстояниях от диона могут находиться точки этой орбиты? Ответ дайте в виде формулы. Нарисуйте дион, частицу и ее орбиту.

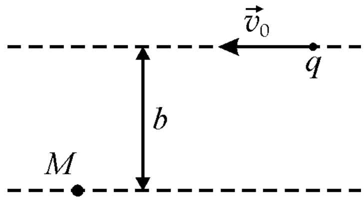
2.2. Укажите положение орбиты частицы относительно диона (найдите все необходимые для этого геометрические характеристики и выразите их в виде формул). Обозначьте эти характеристики на рисунке, который Вы изобразили, отвечая на вопрос из предыдущего пункта.

2.3. Укажите две физические величины (одну – скалярную, другую – векторную), сохраняющиеся при движении заряженной частицы в поле диона. Выразите эти величины через координату $\vec{r}$ и скорость частицы $\vec{v}$ (в эти формулы также должны войти параметры системы). Получите формулы для указанных Вами величин в случае движения по исследованной круговой орбите (ответ дайте в виде формул, в которые входят параметры системы и v).

Указание. Найденная Вами векторная величина при $M = 0$ должна переходить в момент импульса частицы, который очевидно сохраняется при движении в поле неподвижного точечного электрического заряда. При $M \neq 0$ она будет равна величине полного момента импульса системы, состоящей из диона, частицы и их общего электромагнитного поля.

Математическая подсказка. Для ответа на поставленный вопрос может оказаться полезным следующее тождество: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)}{r^2} = -\frac{(\vec{v}\vec{r})}{r^3}$.

Часть III: магнитный монополь и квантование электрических зарядов.



Рассмотрим движение заряженной частицы массой m и электрическим зарядом q в поле закрепленного монополя с магнитным зарядом M. Пусть частица летит мимо монополя, начиная движение с очень большого расстояния со скоростью v_0 таким образом, что *прицельный параметр* равен b (это величина расстояния от монополя до линии движения частицы на очень большом расстоянии – см. рисунок). Оказалось, что значение b таково, что после пролета мимо монополя и удаления на очень большое расстояние частица движется в плоскости, параллельной плоскости рисунка, находящейся на расстоянии d от нее.

3.1. Какова будет величина скорости частицы v' после рассеяния на монополе (то есть после удаления на очень большое расстояние от него)? Ответ дайте в виде формулы, в которую входят заданные выше величины.

3.2. Найдите возможные значения угла рассеяния частицы (это угол между $\vec{v}'$ и $\vec{v}_0$). Ответ дайте в виде формулы, в которую входят заданные выше величины.

3.3. Чему будет равно расстояние от монополя до линии движения частицы после рассеяния b'? Ответ дайте в виде формулы, в которую входят заданные выше величины.

В рамках классической теории магнитные и электрические заряды могут принимать произвольные значения, однако с точки зрения *квантовой теории* это не так. Дело в том, что в квантовой теории и момент количества движения частицы, связанный с ее движением (его называют *орбитальным моментом*), и момент количества движения электромагнитного поля подчиняются условию квантования момента импульса: его проекция на любое выделенное направление должна быть кратна величине $\frac{\hbar}{2} \equiv \frac{h}{4\pi}$, где фундаментальная постоянная $h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

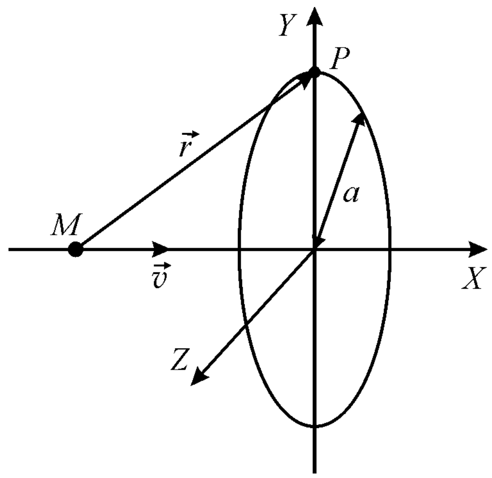
3.4. Рассмотрите движение заряженной частицы с электрическим зарядом q в поле магнитного заряда M, используя условие квантование момента импульса. Получите условие, связывающее значения q и M, при которых законы сохранения в этой задаче и квантование момента импульса не противоречат друг другу. Вычислите величину такого магнитного заряда, существование которого приведет к тому, что электрические заряды всех частиц должны будут быть кратны элементарному заряду $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В ответе запишите формулу для связи магнитных и электрических зарядов и численное значение нужной величины M в Кл·м/с.

Возможное решение

Часть I

1.1. Здесь есть два возможных пути решения.

Способ 1: Магнитные заряды должны вводиться в электродинамику таким образом, чтобы поддерживалась «симметрия» электродинамических уравнений при замене магнитного заряда на электрический и одновременно – магнитного поля на электрическое (как видно из условия, магнитное поле покоящегося магнитного заряда с точностью до замен $M \leftrightarrow q$, $\mu_0 \leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}$ и $\vec{B} \leftrightarrow \vec{E}$ совпадает с электрическим полем покоящегося электрического заряда). Как известно, движущиеся электрические заряды создают магнитные поля. Электрическое поле точечного электрического заряда $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$, где вектор $\vec{r}$ соединяет точку расположения заряда и точку наблюдения P, то есть $\vec{r} \equiv \vec{r}_P - \vec{\rho}(t)$ (здесь $\vec{\rho}(t)$ – радиус-вектор, который задает положение заряда относительно начала системы координат). Магнитное поле движущегося заряда можно определить из закона Био-Савара-Лапласа (с учетом того, что $I \cdot d\vec{l} = q\frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v}$): $\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3}[\vec{v}\times\vec{r}]$. Таким образом, для точечного заряда, движущегося со скоростью $\vec{v}$, $\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}]$. Поэтому можно сделать вывод (с учетом соображений размерности и упомянутой симметрии), что <u>движущийся магнитный заряд</u> создает электрическое поле $\vec{E} = [\vec{v}\times\vec{B}]$. Подчеркнем, что это – полное поле, создаваемое *равномерно* движущимся зарядом (при переменной скорости возникают еще поля излучения).



Теперь рассмотрим пролет монополя через сверхпроводящее кольцо. Введем систему координат, показанную на рисунке: начало координат поместим в центр кольца, ось X направим по оси кольца, а ось Y направим к выбранному элементу P кольца. Скорость монополя $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_x$, закон его движения $\vec{\rho}(t) = vt \cdot \vec{e}_x$, а $\vec{r}_P = a\vec{e}_y$. Электрическое поле, создаваемое монополем в точке P, равно $\vec{E} = [\vec{v}\times\vec{B}] = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}[(v\vec{e}_x)\times(a\vec{e}_y - vt\vec{e}_x)] = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \cdot \frac{av}{(a^2+v^2t^2)^{3/2}}\vec{e}_z$. Поскольку это поле симметрично относительно оси x, то поле монополя создает в кольце ЭДС, равную $U_E = E \cdot 2\pi a = \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2+v^2t^2)^{3/2}}v$. При любом конечном токе в сверхпроводящем кольце создаваемая в нем ЭДС должна оставаться нулевой. ЭДС в кольце складывается из «внешней» ЭДС, создаваемой внешними полями, и ЭДС самоиндукции $U_L = -L\frac{dI}{dt}$. Выражение для ЭДС электрического поля монополя, полученное выше, можно записать в виде производной по времени: $U_E = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 M}{2} \cdot \frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right)$. Значит, условие равенства нулю полной ЭДС приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt}\left(-LI + \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right) = 0 \Rightarrow -LI + \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}} = \text{const} = -\frac{\mu_0 M}{2}.$$

Константа вычислена при $t \to -\infty$. Таким образом, $I(t) = \frac{\mu_0 M}{2L} \cdot \left(1 + \frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right)$. График этой функции показан на рисунке ($\tau \approx \frac{a}{v}$).

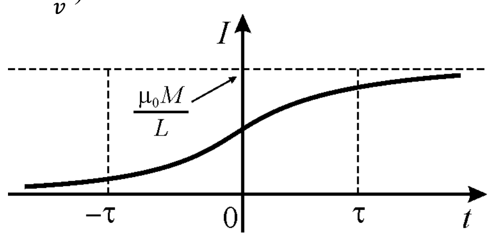


Рис. 1.

Правильность построения графика определяется следующими признаками: монотонное увеличение I, выход на постоянное положительное значение при $t \to +\infty$.

Способ 2: Другой способ связан с использованием закона электромагнитной индукции Фарадея и закона полного тока. В этом случае важно учесть, что электрическое поле движущегося монополя, которое мы вычисляли выше, может быть представлено в виде суммы вихревого индукционного поля (которое создает ЭДС индукции $U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{ex} + LI)$) и поля магнитного тока. Начнем с вычисления Φ_{ex} – потока от магнитного поля монополя через контур. Так как магнитное поле монополя подобно электрическому полю точечного электрического заряда, то этот магнитный поток равен $\Phi_{ex} = \frac{\Omega}{4\pi}\mu_0 M$. Здесь Ω – телесный угол, охватываемый конусом, у которого вершина находится в точке расположения монополя, а основание – площадь кольца. Угол полураствора α этого конуса определяется из соотношения $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{x}$. Величина телесного угла (согласно математической подсказке)

$$\Omega = 2\pi \cdot [1 - \cos\alpha] = 2\pi \cdot \left[1 - \frac{|x|}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right].$$

Поэтому:

$$\Phi_{\mathrm{ex}}(x) = \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \left[1 - \frac{|x|}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right]\frac{x}{|x|} = \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \left[\frac{t}{|t|} - \frac{vt}{\sqrt{a^2 + v^2 t^2}}\right].$$

Чтобы учесть вклад от магнитного тока, используем закон полного тока, согласно которому циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному контуру в вакууме равна полному электрическому току, пронизывающему этот контур, умноженному на μ_0. Отметим, что циркуляция вектора $\vec{B}$ вычисляется следующим образом: контур разбивают на бесконечно малые элементы $d\vec{l}$ и вычисляются скалярные произведения $(\vec{B} \cdot d\vec{l})$. Сумма этих скалярных произведений и есть циркуляция. По сути такая операция (суммирование бесконечно большого количества бесконечно малых вкладов) есть интегрирование вдоль замкнутого контура, поэтому ее обозначают символом $\oint$, то есть закон полного тока можно записать так: $\oint(\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 I$. Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ – это и есть ЭДС. Поэтому вклад в ЭДС поля магнитного тока можно записать как $U_M = \mu_0 I_M = \mu_0 \frac{dM}{dt}$, то есть она пропорциональна скорости изменения магнитного заряда $M(t)$, прошедшего через контур к моменту времени t. В случае пролета магнитного монополя закон изменения магнитного заряда $M(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ M, t \geq 0 \end{cases}$, и это выражение также можно записать в виде $M(t) = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{t}{|t|}\right)$. Таким образом, условие равенства нулю полной ЭДС приводит к соотношению $\frac{d}{dt}\left(-\Phi_{ex} - LI + \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \left(1 + \frac{t}{|t|}\right)\right) = 0$, и с учетом того, что при $t \to -\infty$ все три слагаемые в скобках равны нулю, получаем: $LI = \frac{\mu_0 M}{2} \cdot \left(1 + \frac{t}{|t|}\right) - \Phi_{ex}$. Подставив сюда выражение для Φ_{ex}, найдем окончательно: $I(t) = \frac{\mu_0 M}{2L} \cdot \left(1 + \frac{vt}{\sqrt{a^2 + v^2 t^2}}\right)$. Мы получили то же выражение, что и в первом способе.

1.2. Выражение для силы тока в кольце, полученное в предыдущем пункте, можно записать в виде функции, зависящей от x, если считать, что скорость монополя изменяется очень слабо ($x \approx vt$). На самом деле мы уже использовали это приближение, так как использовали формулу поля равномерно движущегося заряда, так что в итоге его применимость необходимо будет проверить. В случае его справедливости $I(x) = \frac{\mu_0 M}{2L} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$. Максимальная величина силы тока достигается при $x \to +\infty$, то есть $I^S_{max} = \frac{\mu_0 M}{L} \approx 4$ мА (индуктивность определяется формулой Гровера: $L \approx 10^{-5}$ Гн).

В процессе движения монополь расходует свою кинетическую энергию на увеличение энергии магнитного поля кольца. Минимальная скорость соответствует положению монополя, при котором максимален ток, то есть

$$\frac{mv_{min}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{L(I^S_{max})^2}{2} \Rightarrow v_0^2 - v_{min}^2 = \frac{L(I^S_{max})^2}{m} = \frac{(\mu_0 M)^2}{mL}.$$

Даже очень грубые численные оценки показывают, что $\frac{L\left(I^S_{max}\right)^2}{2} \ll \frac{mv_0^2}{2}$, то есть уменьшение кинетической энергии монополя действительно очень мало и изменение скорости тоже очень мало (можно считать, что $v_0 \approx v_{min}$). Поэтому $\Delta v_{max} = \frac{v_0^2 - v_{min}^2}{v_0 + v_{min}} \approx \frac{v_0^2 - v_{min}^2}{2v_0} \approx \frac{(\mu_0 M)^2}{2mLv_0} \approx 8 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Примечание: поскольку учет поля магнитного тока – достаточно нетривиальная часть задачи, то на олимпиаде положительная оценка за п. 1.1 и п. 1.2 выставлялась участникам, которые, не допустив иных ошибок, получали результат с помощью модели, не учитывающей этого вклада.

1.3. A) При большом сопротивлении $R \gg \frac{Lv_0}{2r}$ влияние ЭДС самоиндукции всегда мало, и индукционный ток пропорционален ЭДС «внешней» индукции, а она – скорости изменения магнитного потока. Индукционный ток изменяется согласно Рис. 2. Заметим, что этот график подобен графику производной от функции, график которой изображен на рисунке 1.

B) Если $\frac{Lv_0}{a} \ll R \ll \frac{Lv_0}{2r}$, то ЭДС самоиндукции пренебрежимо мала только «далеко» за пределами промежутка времени $|t| \le \frac{r}{v_0}$ ($t = 0$ – момент пролета плоскости симметрии кольца), когда монополь находится далеко от кольца. Внутри указанного промежутка времени ЭДС самоиндукции, напротив, очень велика, и препятствует изменению тока в кольце. Поэтому ток, достигнув максимального значения при подлете к кольцу монополя, меняется незначительно при его пролете через область плоскости кольца. После выхода монополя из этой области сила тока возвращается к «квазистационарной» зависимости за время, малое по сравнению с $\frac{a}{v_0}$ (Рис. 3).

C) Тонкий линейный цилиндрический магнит представляет собой магнитный диполь. Линии магнитной индукции такого магнита выходят из одного полюса и входят в другой. При пролете диполя через кольцо магнитный поток через него сначала растет, затем резко убывает, и затем плавно изменяется вблизи минимума (проходит через 0, когда середина магнита совпадает с плоскостью симметрии кольца). Потом поток снова растет до максимального значения и далее плавно падает, стремясь к нулевому значению. Зависимость тока от времени при большом сопротивлении соответствует скорости изменения магнитного потока (Рис. 4).

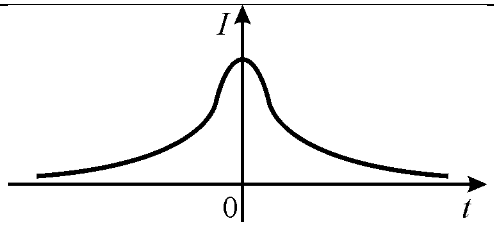


Рис. 2.

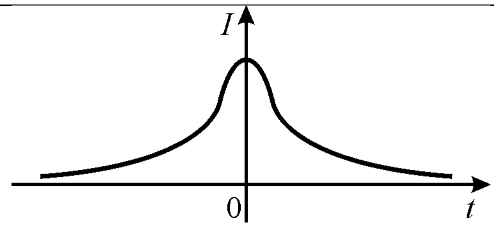


Рис. 3.

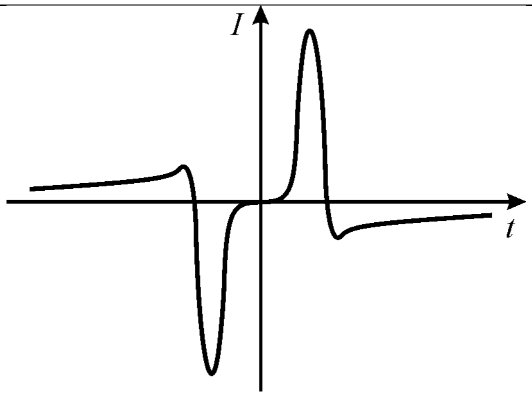


Рис. 4.

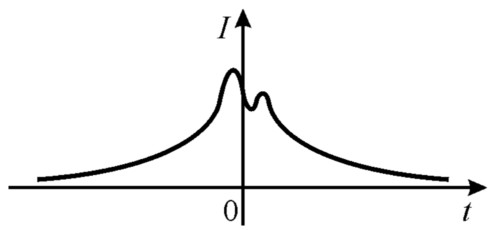


Рис. 3'.

Правильность построения графиков определяется следующими признаками: число «выбросов», их «полярность», наличие симметрии и антисимметрии. У графика на рис. 3 может быть «искажение» симметричного поведения вблизи вершины: она может быть «срезана», или там может быть изображено небольшое «колебание» тока – например, как на рис. 3'.

1.4. В первую очередь заметим, что при движении монополя его кинетическая энергия расходуется на создание магнитного поля индукционного тока ($W_L = \frac{LI^2}{2}$) и на выделение теплоты в проводящем кольце ($dQ = I^2R \cdot dt$). Для нашего кольца индуктивность $L \approx 10^{-5}$ Гн, а сопротивление $R = \frac{2\rho a}{r^2} = 0{,}08$ Ом. При $x \gg r$ индуктивными потерями можно пренебречь по сравнению с тепловыми. Индуктивность сказывается только в области $x \lesssim r$ – там поток меняется очень быстро, и вычисление без учета индуктивности привело бы к значениям силы тока, превышающим I^S_{max}, чего, конечно же, не может быть (введение сопротивления кольца не может увеличить силу тока в нем). «Внешняя» ЭДС (см. пункт 1.1) определяется выражением $U_E \approx \frac{\mu_0 M}{2}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\frac{dx}{dt}$. Таким образом, величина силы индукционного тока в момент времени, когда монополь находится на расстоянии x от контура (договоримся, что $x < 0$ при подлете к кольцу и $x > 0$ после пролета через него) и движется со скоростью v, равна $I(x) = \frac{|U_E|}{R} = \frac{\mu_0 M}{2R}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}v(x)$. Для заданных параметров кольца $R \approx \frac{1}{125}\frac{Lv_0}{2r} \approx 8\frac{Lv_0}{a}$, поэтому можно для оценки принять, что $\frac{Lv_0}{a} \ll R \ll \frac{Lv_0}{2r}$. Значит, характер изменения тока в кольце примерно соответствует графику на рис. 3, и мы можем при оценивании использовать полученное для индукционного тока выражение для всех моментов времени. В этом приближении мгновенная мощность тепловых потерь $P = I^2R = \frac{(\mu_0 M)^2}{4R}\frac{a^4}{(a^2+x^2)^3}v^2(x)$. Также ясно, что в рассматриваемом случае, как и в предыдущих (пункт 1.2), изменение скорости монополя очень малó. Поэтому приближенно можно считать, что общее количество теплоты, выделяющееся в кольце, равно $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} P dt \approx \frac{(\mu_0 M)^2 v_0}{4R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^4}{(a^2+x^2)^3}dx$. Поскольку $x = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, то $dx = a\sin^{-2}\alpha d\alpha$, и

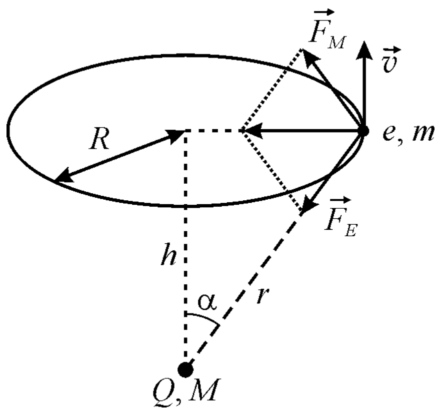
$$Q \approx \frac{(\mu_0 M)^2 v_0}{4Ra}\int_0^{\pi}\sin^4\alpha\, d\alpha = \frac{3\pi(\mu_0 M)^2 v_0}{32Ra}.$$

Теперь находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{min}^2}{2} \approx \frac{mv_0^2}{2} - Q \Rightarrow v_0^2 - v_{min}^2 = \frac{2Q}{m} \approx \frac{3\pi(\mu_0 M)^2 v_0}{16mRa}.$$

С учетом малости изменения скорости $\Delta v \approx \frac{v_0^2 - v_{min}^2}{2v_0} \approx \frac{3\pi(\mu_0 M)^2}{32mRa} \approx 6 \cdot 10^{-6}$ м/с. Отметим, что в п.1.3 и 1.4 отсутствие учета вклада поля магнитного тока не приводит к существенному искажению результатов. Поэтому в этих пунктах за решения без учета указанного вклада выставлялся полный балл.

Часть II



2.1. Обратим внимание на то, что при движении заряженной частицы с массой m и электрическим зарядом q в поле неподвижного диона сохраняется сумма кинетической энергии частицы и потенциальной энергии ее взаимодействия с электрической компонентой поля диона. Работа магнитной компоненты силы Лоренца $\vec{F}_M = q[\vec{v}\times\vec{B}]$ равна нулю, а работа электрической компоненты $\vec{F}_M = q\vec{E}$ может быть вычислена как разность значений потенциальной энергии $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$ (r – расстояние от диона до частицы). Итак, $\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} = \text{const}$. Поэтому при неизменной по модулю скорости также должно быть неизменно расстояние от диона до частицы. Это значит, что дион должен находиться на оси симметрии круговой орбиты частицы (эта ось проходит через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости – см. рисунок). Действующая на частицу сила $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\times\vec{B}]$ должна быть направлена по радиусу орбиты к ее центру. Напомним, что вектор $\vec{B}$ магнитной индукции диона направлен в радиальном направлении от него. Из сказанного ясно, что такое движение возможно только при $q < 0$ и в случае, когда составляющие магнитной и электрической компонент силы Лоренца, направленные перпендикулярно плоскости орбиты, взаимно компенсируются:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|Q}{r^2}\cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|M}{r^2}v\ \sin\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{c^2Q}{vM}.$$

Уравнение для центростремительной компоненты ускорения позволяет найти r:

$$m\frac{v^2}{r\sin\alpha} = |q|\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha + \frac{\mu_0 Mv}{4\pi r^2}\cos\alpha\right),$$

откуда $r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|Q}{mv^2}$. Интересно, что эта формула не содержит M – расстояние до точек круговой орбиты заряженной частицы в электромагнитном поле диона совпадает с радиусом ее круговой орбиты в поле только электрического заряда диона. Но из-за наличия у диона магнитного заряда плоскость орбиты частицы смещается так, что дион находится вне этой плоскости.

2.2. В соответствии с анализом, проведенном в предыдущем пункте, орбита радиусом $R = r\cdot\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|Q^2c^2}{mv^2\sqrt{c^4Q^2+v^2M^2}}$ находится в плоскости, находящейся от диона на расстоянии $h = r\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|QM}{mv\sqrt{c^4Q^2+v^2M^2}}$, причем дион находится на оси симметрии орбиты. Орбита видна из точки расположения диона под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{c^2Q}{vM}\right)$. Ясно, что для полного описания положения орбиты достаточно знать любые две из этих трех величин.

2.3. Как видно, скалярной сохраняющейся величиной является полная механическая энергия частицы $E \equiv \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$. Векторная сохраняющаяся величина должна быть связана с моментом импульса $\vec{L} = m[\vec{r}\times\vec{v}]$, который очевидно сохраняется при движении в поле неподвижного точечного электрического заряда – при $M = 0$. Скорость изменения момента импульса частицы при движении по орбите определяется только моментом магнитной составляющей силы Лоренца (момент электрической составляющей очевидно равен нулю):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}\times\vec{F}_M\right] = \frac{\mu_0 M|q|}{4\pi r^3}\left[\vec{r}\times[\vec{v}\times\vec{r}]\right] = -\frac{\mu_0 M|q|}{4\pi}\left\{\frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{v}\vec{r})\vec{r}}{r^3}\right\}.$$

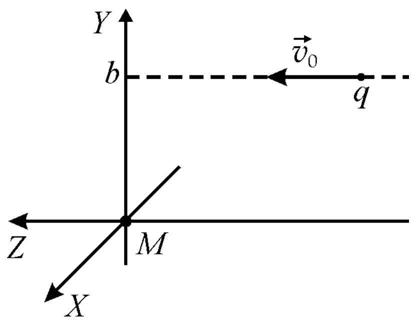
Поскольку $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, а $\frac{(\vec{v}\vec{r})}{r} = \frac{vr\cos(\vec{v},\vec{r})}{r} = v\cos(\vec{v},\vec{r}) = v_r = \frac{dr}{dt}$, то

$$\frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{v}\vec{r})\vec{r}}{r^3} = \frac{r\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{r^2} - \frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)\vec{r}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right).$$

Таким образом, $\frac{d}{dt}\left(\vec{L} + \frac{\mu_0 M|q|}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$! Итак, векторная величина $\vec{J} \equiv \vec{L} + \frac{\mu_0 M|q|}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}$ сохраняется при движении заряженной частицы в поле диона. Вычисление значений E и $\vec{J}$ (при вычислении $\vec{J}$ удобно сразу учесть, что из соображений симметрии этот вектор направлен по оси орбиты) с учетом выражений для r и α дает: $E = -\frac{mv^2}{2}$ и $\vec{J} = \frac{\mu_0|q|}{4\pi v}\sqrt{c^4Q^2 + v^2M^2}\cdot\vec{n}$, где единичный вектор $\vec{n}$ направлен от точки расположения диона в центр орбиты частицы.

Комментарий. Электромагнитное поле – это самостоятельный вид материи, и оно обладает энергией, импульсом (поток энергии и поток импульса связаны с *вектором Умова–Пойнтинга*: $\vec{S}_E = c\cdot\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]$) и, соответственно, моментом импульса. Момент импульса изолированной системы должен сохраняться, и в данном случае этот сохраняющийся момент есть сумма момента импульса частицы в системе отсчета, связанной с дионом, и момента импульса электромагнитного поля в той же системе отсчета (как видно, для нашей системы $\vec{S}_p \neq 0$!). Значит, второе слагаемое в $\vec{J}$ есть момент импульса электромагнитного поля, а сама величина $\vec{J}$ имеет смысл *полного момента импульса* системы, состоящей из диона, заряженной частицы и электромагнитного поля.

Часть III:



3.1. В соответствии с результатом пункта 2.3, при движении заряженной частицы в поле магнитного монополя сохраняются ее полная энергия, равная по модулю кинетической энергии $E = \frac{mv^2}{2}$, и величина $\vec{J} \equiv \vec{L} - \frac{\mu_0 Mq}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}$.

Введем систему координат, показанную на рисунке. Когда частица находится далеко от монополя, $|\vec{v}| \equiv v_0$, $\vec{v} = v_0\vec{e}_z$, $\vec{r} = b\vec{e}_y - r_z\vec{e}_z$ и $r = \sqrt{b^2 + r_z^2}$, причем $r \approx r_z \gg b$. Тогда

$$\vec{J} \equiv m[\vec{r}\times\vec{v}] - \frac{\mu_0 Mq}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r} \equiv mv_0 b\vec{e}_x + \frac{\mu_0 Mq}{4\pi}\vec{e}_z.$$

После рассеяния на монополе (на очень большом расстоянии от него) заряд будет двигаться по прямой со скоростью $\vec{v}'$. Ясно, что для сохранения E необходимо, чтобы выполнялось условие $v' = v_0$.

3.2. Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении $\vec{v}'$, а $\vec{b}'$ – вектор, соединяющий точку расположения монополя с ближайшей к нему точкой прямой, по которой движется заряд после рассеяния. Тогда радиус-вектор частицы в момент, когда она находится на расстоянии r от монополя, равен $\vec{r} = \vec{b}' + \vec{n}\sqrt{r^2 - b'^2}$. По условию вектор $\vec{n}$ лежит в плоскости, параллельной (yz), то есть можно записать: $\vec{n} = \pm\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$, где θ – угол между $\vec{v}'$ и $\vec{v}_0$. Также очевидно, что $\vec{b}' \perp \vec{n}$. Из законов сохранения следует, что

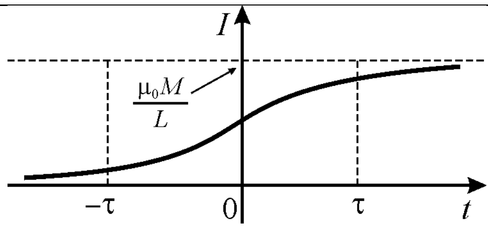
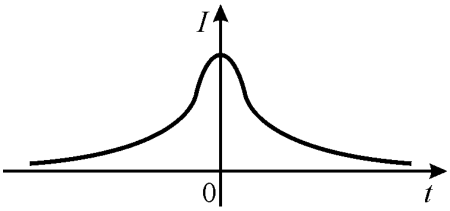
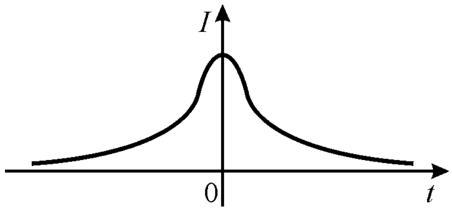
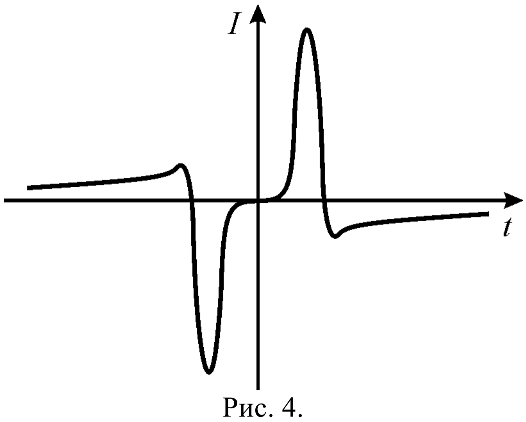
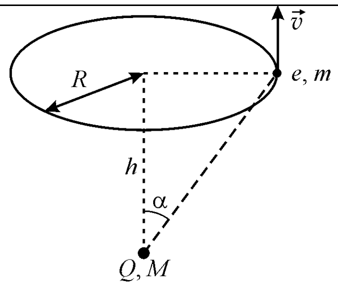
$$\frac{[\vec{r}\times\vec{v}']}{v_0} - \frac{\mu_0 Mq}{4\pi m v_0}\frac{\vec{r}}{r} = \left[\vec{b}'\times\vec{n}\right] - \frac{\mu_0 Mq}{4\pi m v_0}\vec{n} = b\vec{e}_x + \frac{\mu_0 Mq}{4\pi m v_0}\vec{e}_z.$$

Обозначим для краткости $\frac{\mu_0 Mq}{4\pi m v_0} \equiv \beta$, и умножим записанное равенство векторно на $\vec{n}$: получим $\vec{b}' = b[\vec{n}\times\vec{e}_x] + \beta[\vec{n}\times\vec{e}_z]$. Подставляя сюда выражение для $\vec{n}$, найдем, что $\vec{b}' = \pm\beta\ \sin\theta\,\vec{e}_x + b\ \cos\theta\,\vec{e}_y \mp b\ \sin\theta\,\vec{e}_z$. Значит, расстояние до плоскости движения частицы после рассеяния $d = |d_x| = |\beta\ \sin\theta\,|$. Таким образом, есть два возможных значения угла рассеяния – это $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{4\pi m v_0 d}{\mu_0|Mq|}\right)$ или $\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{4\pi m v_0 d}{\mu_0|Mq|}\right)$. Как видно, условие задачи корректно только при $d \le \frac{\mu_0|Mq|}{4\pi m v_0}$ (все допустимые значения d лежат в этом диапазоне).

3.3. Как видно из формулы для $\vec{b}'$, модуль этой величины равен $b' = \sqrt{b^2 + \beta^2\sin^2\theta} = \sqrt{b^2 + d^2}$. Кроме того, при возведении равенства $\left[\vec{b}'\times\vec{n}\right] - \beta\vec{n} = b\vec{e}_x + \beta\vec{e}_z$ скалярно в квадрат, обнаружим, с учетом перпендикулярности векторов $\left[\vec{b}'\times\vec{n}\right]$ и $\vec{n}$, а также векторов $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_z$, что $\left[\vec{b}'\times\vec{n}\right]^2 + \beta^2 = b^2 + \beta^2$. Поскольку $\vec{b}'$ и $\vec{n}$ тоже перпендикулярны, то $\left[\vec{b}'\times\vec{n}\right]^2 = b'^2$. Отсюда следует, что $b' = b$! Это означает, что ограничение на d еще более жесткое: из двух полученных соотношений следует, что $d = 0$. Вместе с тем, очевидно, и $\sin\theta = 0$, то есть $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$. На самом деле случай $\theta = 0$ реализуется только как предельный при очень больших b и v_0. Как видно, при рассеянии заряда на монополе, при котором заряд после рассеяния движется параллельно исходной плоскости движения, в действительности заряд движется именно в этой плоскости!

3.4. Можно исходить из того, что проекция момента импульса электромагнитного поля в системе «магнитный монополь+ частица + поле» на направление $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ должна быть кратна $\frac{h}{4\pi}$. Тогда должно выполняться соотношение $\frac{\mu_0 Mq}{4\pi} = k\cdot\frac{h}{4\pi} \Rightarrow qM = k\cdot\frac{h}{\mu_0}$, где k – целое число. Значит, в непротиворечивой теории заряды всех частиц должны быть кратны элементарному, если $\frac{h}{\mu_0 M} = e \Rightarrow M = \frac{h}{\mu_0 e} \approx 3{,}3\cdot 10^{-9}$ Кл·м/с.

ТАБЛИЦА ОТВЕТОВ И КРИТЕРИИ

№	ОТВЕТ	Максимальный балл
1.1.	 Рис. 1.	**1**
1.2.	$I(x)=\dfrac{\mu_0 M}{2L}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$	**2**
	$I^S_{max}=\frac{\mu_0 M}{2L}\approx 4$ мА, ответ должен быть правильным при округлении до целого числа мА;	**0,75 + 0,25 = 1**
	$\Delta v_{max}\approx\frac{(\mu_0 M)^2}{8mLv_0}\approx 8\cdot 10^{-5}$ м/с, ответ должен быть правильным при округлении до целого числа 10^{-5}м/с.	**1,5 + 0,5 = 2**
1.3.	 Рис. 2.  Рис. 3.  Рис. 4.	**1 + 2 + 1 = 4 (два балла – за график на рис. 3)**
1.4.	$I(x)=\dfrac{\mu_0 M}{2R}\dfrac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}v(x);$	**2**
	$\Delta v\approx(6\pm 2)\cdot 10^{-6}$ м/с, при попадании в «удвоенный» по ширине интервал – только 1 балл.	**3**
2.1.	$r=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lvert q\rvert Q}{mv^2}=\text{const}$  (Обозначены любые две из трех величин – R, h, α).	**2 + 1 = 3**
2.2.	Орбита радиусом $R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lvert q\rvert Q^2c^2}{mv^2\sqrt{c^4Q^2+v^2M^2}}$ лежит в плоскости, находящейся от диона на расстоянии $h=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lvert q\rvert QM}{mv\sqrt{c^4Q^2+v^2M^2}}$ и	**1 + 1 = 2**

	видна из точки расположения диона под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{c^2Q}{vM}\right)$ (нужно обозначить на рисунке любые две из этих трех величин).	
2.3.	$$E \equiv \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r};$$	**1**
	$$\vec{J} \equiv m[\vec{r}\times\vec{v}] + \frac{\mu_0 M\lvert q\rvert}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}.$$	**4**
	На заданной орбите $E = -\frac{mv^2}{2}$.	**1**
	На заданной орбите $\vec{J} = \frac{\mu_0\lvert q\rvert}{4\pi v}\sqrt{c^4Q^2 + v^2M^2}\cdot\vec{n}$, где единичный вектор $\vec{n}$ направлен от точки расположения диона в центр орбиты.	**3**
3.1.	$$v' = v_0$$	**1**
3.2.	$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{4\pi m v_0 d}{\mu_0\lvert Mq\rvert}\right)$ или $\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{4\pi m v_0 d}{\mu_0\lvert Mq\rvert}\right)$, или $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$.	**2×2=4**
3.3.	$$b' = \sqrt{b^2 + d^2} = b.$$	**4**
3.4.	$qM = k\cdot\frac{h}{\mu_0}$, где k – целое число	**3**
	$M = \frac{h}{\mu_0 e} \approx 3{,}3\cdot10^{-9}$ Кл·м/с	**1**
ВСЕГО		**42**